1 Vettori

(20 problemi, difficoltà 46, soglia 32)

Formulario

Operazioni tra vettori

Somma $\quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$ (1.1)

Differenza $\quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$ (1.2)

Prodotto scalare $\quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$ (1.3)

Prodotto vettoriale $\quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \quad |\boldsymbol{c}| = c = ab\sin\theta, \quad \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_z b_y - a_y b_z \end{cases}$ (1.4)

Componenti cartesiane $\quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1.5)

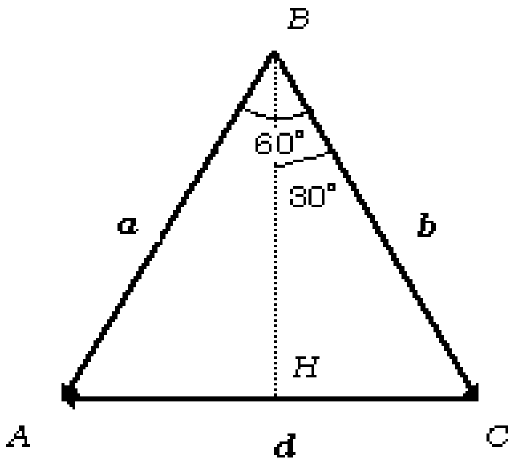
Versori

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x \boldsymbol{i} + \boldsymbol{a}_y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{a}_z \boldsymbol{k}; \qquad |\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1 \\
\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{k} = 0 \\
\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 1 \\
\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = 0 \\
\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}.
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

Problemi svolti

1.1. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ formano un angolo di 60° e il loro modulo è 4 m. Calcolare: a) il modulo del loro risultante, b) il modulo della loro differenza $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

(2)



---

a) Il risultante dei due vettori ha per modulo la diagonale del parallelogramma costruito con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, ovvero

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 2\overline{BH} = 2a \cos 30° = 4\sqrt{3}\text{m}.$$

b) Il vettore differenza non è altro che il vettore $\boldsymbol{d}$, che, trattandosi di un triangolo equilatero, ha modulo 2 m.

1.2. Determinare l'angolo tra i due vettori

$$\boldsymbol{a} = 2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b} = -2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 4\,\boldsymbol{k}.$$

(3)

È

$$a\,b \cos\,\theta = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\,,$$

quindi

$$\cos\theta = \frac{-4+3+4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{29}} = 0{,}227,$$

$$\theta = 77°.$$

1.3. Dati i due vettori $\boldsymbol{a}$ (1,1,0) e $\boldsymbol{b}$ (0,1,0), calcolare: a) l'angolo tra i due vettori, b) il modulo del loro prodotto vettoriale, c) il modulo della differenza $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, d) il loro prodotto scalare. **(2)**

È uno dei casi in cui non conviene cercare di rispondere nell'ordine alle varie domande.
Conviene iniziare dalla domanda d): $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ = 0 + 1 + 0 = 1. Essendo però anche

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a\, b \cos\theta = \sqrt{2}\sqrt{1}\cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta = 1,$$

ne risulta subito che l'angolo tra i due vettori è $\pi/4$. Allo stesso modo il modulo del prodotto vettoriale risulta

$$a\, b \sin\theta = a\, b = 1\ .$$

Infine si ha

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}| = \sqrt{(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2} = 1.$$

1.4. Dati i due vettori $\boldsymbol{a}$ (1,0,1) e $\boldsymbol{b}$ (–2, 0, –2) m, calcolare: a) il modulo del vettore $\boldsymbol{a}$ + $\boldsymbol{b}$, b) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, c) il modulo di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, d) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. **(2)**

———

a)

$$\left|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right| = \sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2}\ .$$

b) Il vettore $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ è perpendicolare sia ad $\boldsymbol{a}$ che a $\boldsymbol{b}$, perciò il prodotto scalare $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, essendo i due vettori perpendicolari, sarà necessariamente nullo.

c)

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18} = 4{,}24.$$

d)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\,4\ .$$

1.5. Dati i due vettori $\boldsymbol{a}$ (1,1,0) e $\boldsymbol{b}$ (–2,–2,0), calcolare: a) il modulo del prodotto vettoriale, b) il modulo della somma, c) il loro prodotto scalare, e) il modulo della loro differenza. **(2)**

———

Osserviamo che i due vettori sono complanari nel piano (x, y) e sono orientati il primo lungo la bisettrice del primo quadrante, il secondo lungo quella del terzo, pertanto formano un angolo di 180°. Perciò:
a) Il prodotto vettoriale di due vettori antiparalleli è nullo.
b) La somma dei due vettori è un vettore orientato lungo la bisettrice del terzo quadrante di modulo $\sqrt{8}-\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}41$.
c) Per quanto osservato sopra, si ha $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a\, b = 4$.
d) La differenza dei due vettori, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, è orientata lungo la bisettrice del primo quadrante e vale $\sqrt{9+9} = 4{,}24$.

1.6. Dati i due vettori

$$\boldsymbol{a} = (3\ \boldsymbol{i} + 4\ \boldsymbol{k})\ ,\ \boldsymbol{b} = (4\ \boldsymbol{i} - 3\ \boldsymbol{k}),$$

calcolare: a) il loro prodotto vettoriale, b) il loro prodotto scalare. **(2)**

———

a) I due vettori sono complanari nel piano (x, z), perciò il loro prodotto vettoriale sarà diretto lungo l'asse y con modulo

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z = 16 + 9 = 25\,.$$

b) Il prodotto scalare è nullo, essendo i due vettori perpendicolari, come è facile vedere graficamente, oppure calcolando

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 12 - 12 = 0.$$

1.7. Dati i due vettori $\boldsymbol{a}$ (3,3) e $\boldsymbol{b}$ (6, x), calcolare: a) per quale valore di x l'angolo tra i due vettori è 30°, b) per quale è 90°, c) per quale i due vettori sono paralleli, d) per quale il prodotto vettoriale e quello scalare hanno lo stesso modulo. **(3)**

———

a) Deve essere

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{ab} = \frac{18 + 3x}{\sqrt{18}\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{9x^2 + 108x + 324}{18x^2 + 648} = \frac{3}{4},$$

$$36x^2 + 432x + 1296 = 54x^2 + 1944,$$

$$18x^2 - 432x + 648 = 0,$$

$$x^2 - 24x + 36 = 0,$$

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - 36} = 12 \pm 10{,}4 = \begin{matrix} 22{,}4 \\ \\ 1{,}6 \end{matrix}\,.$$

b) Quando l'angolo è 90° i due vettori sono perpendicolari, cioè il loro prodotto scalare è nullo; quindi

$$18 + 3\,x = 0,$$

$$x = -\,6.$$

c) Due vettori paralleli devono avere rapporto costante tra le corrispondenti componenti secondo gli assi, cioè per $x = 6$.

d) Abbiamo visto che il modulo del prodotto scalare vale $|18 + 3\,x|$; quello del prodotto vettoriale, un vettore diretto secondo l'asse z, vale invece

$$a_x\, b_y - a_y\, b_x = = 3\,x - 18,$$

perciò dovrà essere

$$|18 + 3\,x| = |3\,x - 18|,$$

che ha per soluzione $x = 0$.

1.8. Due vettori ***a*** e ***b*** nel piano (x, y) hanno per prodotto scalare 4 e per prodotto vettoriale 18. Se $b_x/b_y = 3$, ricavare le espressioni versoriali dei due vettori. **(3)**

———

Deve essere

$$\begin{cases} a_x b_x + a_y b_y = 4 \\ a_x b_y - a_y b_x = 18, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a_x \dfrac{b_x}{b_y} + a_y = \dfrac{4}{b_y} \\ a_x - a_y \dfrac{b_x}{b_y} = \dfrac{18}{b_y} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3a_x + a_y = \dfrac{4}{b_y} \\ a_x - 3a_y = \dfrac{18}{b_y} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3a_x + a_y = \dfrac{4}{b_y} \\ -3a_x + 9a_y = -\dfrac{54}{b_y} \end{cases},$$

$$a_y = -\frac{5}{b_y},$$

$$\begin{cases} 9a_x + 3a_y = \dfrac{12}{b_y} \\ a_x - 3a_y = \dfrac{18}{b_y} \end{cases},$$

$$a_x = \frac{3}{b_y},$$

da cui:

$$\frac{a_x}{a_y} = -\frac{3}{5}.$$

Dopo qualche calcolo, si ricava:

$$\boldsymbol{a} = 3\ \boldsymbol{i} - 5\,\boldsymbol{j}\ ,\ \boldsymbol{b} = 3\ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\ .$$

1.9. Due vettori nel piano (x,z) hanno per prodotto scalare 6 e per prodotto vettoriale 21. Calcolare l'angolo formato da essi. **(2)**

———

Deve essere

$$a\ b \cos\ \theta = 6,$$

$$a\ b \sin\ \theta = 21.$$

Dividendo m.a.m. la seconda equazione per la prima, si ricava immediatamente

$$\tan\ \theta = \frac{21}{6},$$

e quindi

$$\theta = 74°03'.$$

1.10. Dati i due vettori

$$\boldsymbol{a} = 2\ \boldsymbol{i} - 3\ x\boldsymbol{j} + 2\ \boldsymbol{k}\ ,$$

$$\boldsymbol{b} = -\,3\ x\ \boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j} - 2\ \boldsymbol{k}\ ,$$

calcolare:

a) per quale valore di x essi sono perpendicolari, b) per quale sono paralleli.

(2)

———

a) Due vettori perpendicolari hanno prodotto scalare nullo, quindi

$$\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -6\,x - 6\,x - 4 = 0,$$

$$x = -\frac{1}{3}.$$

b) Due vettori paralleli hanno invece $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a\ b$, perciò

$$-12x-4=\sqrt{4+9x^2+4}\sqrt{9x^2+4+4},$$

da cui

$$-12x-4=9x^2+8,$$
$$9x^2+12x+12=0,$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-108}}{9}.$$

Non essendovi soluzioni reali, i due vettori non potranno mai essere paralleli.

1.11. Dati i due vettori

$$\boldsymbol{a} = (-3\ \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\ \boldsymbol{k})\ \text{m},$$

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j} - 3\ \boldsymbol{k})\ \text{m},$$

calcolarne: a) il prodotto scalare, b) il prodotto vettoriale, c) l'angolo formato.

(2)

a) Si ha

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -3-2-6 = -11\ \text{m}^2\ .$$

b) Possiamo ricavare subito l'angolo formato, essendo

$$-11 = ab\cos\theta = \sqrt{14}\sqrt{14}\cos\theta = 14\cos\theta,$$

da cui

$$\cos\theta = -\frac{11}{14},$$
$$\theta = 141°47'.$$

A questo punto possiamo calcolare immediatamente il modulo del prodotto vettoriale, espresso da

$$a\ b\ \sin\ \theta = 14\ .\ 0{,}6187 = 8{,}66\ \text{m}^2.$$

c) Alternativamente, ma con calcoli più lunghi, avremmo potuto pervenire allo stesso risultato calcolando le componenti del vettore $\boldsymbol{c}$ prodotto vettoriale di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ mediante le relazioni (1.4):

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y = 3-4=-1 \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z = 2-9=-7 \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x = -6+1=-5 \end{cases},$$

ottenendo ovviamente

$$c=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{74}=8{,}66\ \text{m}^2.$$

1.12. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ nel piano (x, y) hanno $b_x/b_y = 1$, $a_y/a_x = 3$. Calcolare l'angolo tra essi.

(2)

———

Il prodotto scalare dei due vettori si può scrivere in due forme equivalenti

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y = a\,b\cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}} = \frac{\dfrac{b_x}{b_y} + \dfrac{a_y}{a_x}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{a_y^2}{a_x^2}\right)\left(1 + \dfrac{b_x^2}{b_y^2}\right)}} = \frac{4}{\sqrt{10 \cdot 2}} = 0{,}894,$$

$$\theta = 26{,}6°.$$

Un modo alternativo di risolvere il problema, meno elegante ma più rapido è quello di osservare che, detti α e β gli angoli formati con l'asse x dai due vettori è

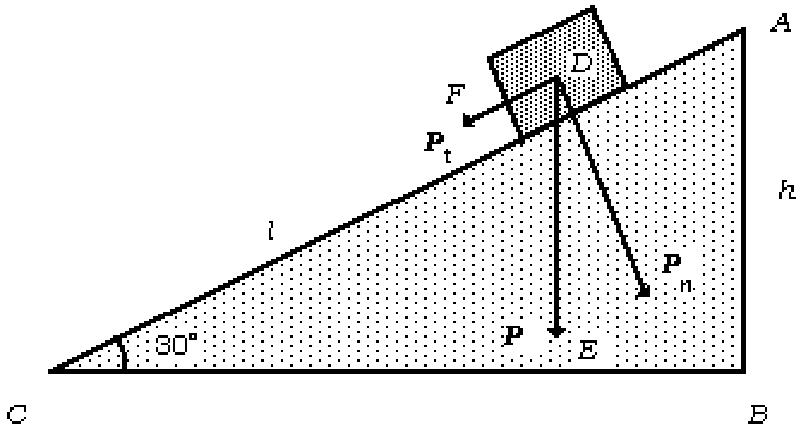
$$\tan\alpha = 3, \quad \alpha = 71{,}56°,$$
$$\tan\beta = 1, \quad \beta = 45°$$

e quindi

$$\theta = \alpha - \beta = 26{,}56°.$$

1.13. Un oggetto di peso P = 30 N è appoggiato su un piano inclinato di un angolo α = 30°. Calcolare il modulo del componente del peso che spinge l'oggetto verso il basso, a) con le formule trigonometriche, b) applicando i criteri di similitudine tra triangoli.

(2)



———

a) Indicando rispettivamente con P_t e P_n le componenti del peso tangente e perpendicolare al piano, dalla figura si vede che, essendo i due triangoli ABC e DEF simili, l'angolo in E è uguale a quello in C, cioè 30°; dalla trigonometria si ottiene subito

$$P_t = P\sin 30° = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15\,\mathrm{N};$$

$$P_n = P\cos 30° = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25{,}9\,\mathrm{N}.$$

b) Alternativamente, sempre per i criteri di similitudine, possiamo scrivere, tenendo conto dei lati corrispondenti, che

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{FD}$$

cioè

$$\frac{l}{P} = \frac{h}{P_t},$$

$$P_t = \frac{h}{l}P.$$

Galileo, studiando il moto dei gravi su piano inclinato, non conoscendo la trigonometria, utilizzò quest'ultimo metodo.

1.14. Dati i vettori $\boldsymbol{a}$ e $-\boldsymbol{a}$, calcolarne:
a) la somma, b) la differenza, c) $\boldsymbol{a} \wedge \Delta\boldsymbol{a}$, d) $\boldsymbol{a} \times \Delta\boldsymbol{a}$.

(2)

Cominciamo col precisare che il vettore $\Delta\boldsymbol{a}$ è la differenza tra il vettore finale $-\boldsymbol{a}$ e il vettore iniziale $\boldsymbol{a}$, ovvero $\Delta\boldsymbol{a} = -2\,\boldsymbol{a}$.
a) La somma vale $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$.
b) La differenza vale $\boldsymbol{a} - (-\boldsymbol{a}) = 2\,\boldsymbol{a}$.
c) $\boldsymbol{a} \wedge \Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \wedge (-2\boldsymbol{a}) = 0$.
d) $\boldsymbol{a} \times \Delta\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times (-2\,\boldsymbol{a}) = 2\,a^2 \cos\pi = -2\,a^2$.

1.15. Il vettore $\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}$ è parallelo al vettore $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$. Calcolare b_y e b_z.

(2)

Se due vettori sono paralleli il rapporto tra le componenti corrispondenti deve essere costante; essendo $a_x / b_x = 3$, dovrà anche essere $-3/b_y = 3$, quindi $b_y = -1$ e $2/b_z = 3$, quindi $b_z = 2/3$.

1.16. I due vettori

$$\boldsymbol{a} = (2\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$
$$\boldsymbol{b} = (-3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

hanno un prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}$ di modulo 4 m^2. Calcolare: a) a_y e b) il vettore $\boldsymbol{c}$.

(3)

———

a) Si può procedere in due modi differenti, il primo più elegante e rapido, il secondo un po' più laborioso, ma altrettanto valido.
Il primo modo si basa sul fatto che il vettore $\boldsymbol{c}$ deve essere perpendicolare al piano (x, y) contenente i due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, quindi deve avere la sola componente z che, per la (1.4), vale $a_x\, b_y - a_y\, b_x$; possiamo allora scrivere

$$a_x\, b_y - a_y\, b_x = 4,$$

da cui

$$2 + 3\, a_y = 4,$$
$$a_y = 2/3 \text{ m}.$$

Il secondo modo si basa invece sul fatto che l'angolo tra i due vettori si ricava dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a\, b} = \frac{-6 + a_y}{\sqrt{4 + a_y^2}\sqrt{10}}.$$

Ma il modulo del prodotto vettoriale è espresso da

$$c = a\ b\ \sin\theta\,,$$

perciò sarà

$$4 = a\, b\sqrt{1 - \cos^2\theta} = a\, b\sqrt{\frac{9a_y^2 + 12a_y + 4}{a^2 b^2}} = 3a_y + 2$$

e quindi

$$a_y = 2/3 \text{ m}.$$

b) Il vettore $\boldsymbol{c}$ è, come abbiamo detto in a), diretto lungo l'asse z; avendo modulo positivo, il verso sarà quello dell'asse z positivo, quindi

$$\boldsymbol{c} = 4\ \boldsymbol{k} \text{ m}.$$

1.17. Dati i vettori

$$\boldsymbol{a} = (-\,3\ \boldsymbol{i} + 5\ \boldsymbol{k}) \text{ m},$$
$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i} - 4\ \boldsymbol{j}) \text{ m},$$
$$\boldsymbol{c} = (-\,3\ \boldsymbol{j} + 2\ \boldsymbol{k}) \text{ m},$$

ricavare il vettore equilibrante $\boldsymbol{e}$. **(2)**

———

La somma vettoriale dei tre vettori dati è il vettore

$$\boldsymbol{s} = (-\,2\ \boldsymbol{i} - 7\ \boldsymbol{j} + 7\ \boldsymbol{k}) \text{ m},$$

il cui equilibrante è il vettore opposto

$$\boldsymbol{e} = (2\ \boldsymbol{i} + 7\ \boldsymbol{j} - 7\ \boldsymbol{k})\ \text{m}.$$

1.18. Dato il vettore $\boldsymbol{r} = 3\ \boldsymbol{i} + 2\ \boldsymbol{j}$, ricavare il vettore $\boldsymbol{s}$ a esso parallelo e complanare il cui prodotto scalare col vettore dato valga 4.

(2)

———

Basta tener presente che il prodotto scalare tra due vettori si può esprimere indifferentemente come $r_x\ s_x + r_y\ s_y$ o come $r\ s \cos\alpha$; se i due vettori sono paralleli $\alpha = 0$, quindi si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3s_x + 2s_y = 4 \\ \sqrt{13\,(s_x^2 + s_y^2)} = 4, \end{cases}$$

che, dopo qualche calcolo, conduce alla soluzione

$$\boldsymbol{s} = \frac{12}{13}\boldsymbol{i} + \frac{8}{13}\boldsymbol{j}.$$

1.19. Dati i vettori

$$\boldsymbol{a} = 3\ \boldsymbol{i} - 4\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b} = 2\ \boldsymbol{i} + 3\ \boldsymbol{j} - 4\ \boldsymbol{k},$$

calcolare il loro prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}$.

(3)

———

Utilizzando le (1.4) otteniamo:

$$c_x = 16 - 3 = 13$$
$$c_y = 3 + 12 = 15$$
$$c_z = 9 + 8 = 17$$

per cui il vettore $\boldsymbol{c}$ è

$$\boldsymbol{c} = 13\ \boldsymbol{i} + 15\ \boldsymbol{j} + 17\ \boldsymbol{k}.$$

Il suo modulo è

$$c = 26{,}1.$$

Per verificare parzialmente la correttezza del calcolo del modulo di $\boldsymbol{c}$, possiamo utilizzare la relazione $c = a\ b \sin\theta$, calcolando l'angolo θ dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a\,b},$$

dalla quale risulta, dopo brevi calcoli:

$$\theta = 111°21'.$$

Ne consegue che

$$c = 27{,}46 \sin 111°21' = 25{,}34.$$

La modesta differenza tra i due valori trovati (2,9%) è dovuta alle approssimazioni nel calcolo delle funzioni trigonometriche.

1.20. Dati i vettori

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{b} = (-2\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}),$$

calcolare:

a) $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a}$,

b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$,

c) $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$,

d) $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$,

e) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

(3)

---

a) I due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono antiparalleli, quindi il loro prodotto vettoriale è nullo e pure nullo sarà il prodotto misto.
b) Dopo un rapido calcolo, risulta $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -4$.
c) Si ha $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 3\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{k}$, quindi il modulo della differenza vale

$$\sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

d) Essendo i due vettori antiparalleli il loro prodotto vettoriale è nullo.
e) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$, il cui modulo vale $\sqrt{2}$.