2 Cinematica

(42 problemi, difficoltà 158, soglia 111)

Formulario

$\boldsymbol{r}$	vettore posizione
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$	equazioni parametriche
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$	legge oraria del moto
$z = z(x,y)$	equazione della traiettoria
$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$	vettore spostamento
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$	velocità media
$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	velocità istantanea
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$	accelerazione media
$\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	accelerazione istantanea
$\boldsymbol{\theta}$	vettore posizione angolare
$\Delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1$	vettore spostamento angolare
$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$	velocità angolare media
$\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$	velocità angolare istantanea
$\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{m}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$	accelerazione angolare media
$\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$	accelerazione angolare istantanea

Moto rettilineo uniforme ($\boldsymbol{v}$ = costante)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\, t$$

Moto uniformemente accelerato ($\boldsymbol{a}$ = costante)

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \pm\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\,t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \pm \boldsymbol{a}\,t \\ v^2 = v_0^2 \pm 2a(r - r_0) \end{cases}$$

Moto circolare uniforme (ω = costante)

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}\ \ t$$

Moto circolare uniformemente accelerato (γ = costante)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} = \pm\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}\,t^2 + \boldsymbol{\omega}_0 t + \boldsymbol{\theta}_0 \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \pm \boldsymbol{\gamma}\,t \\ \omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\,\gamma\,(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

Moto curvilineo

Velocità periferica $\qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$

Accelerazione centripeta

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}$$

$$a_{\mathrm{c}} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Accelerazione tangenziale

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{r}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{dv}{dt}$$

Accelerazione totale

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{c}}^2 + a_{\mathrm{t}}^2}$$

Moto armonico semplice

x elongazione

A ampiezza

ω	pulsazione
φ	costante di fase
$\omega\ t + \varphi$	fase
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	periodo
$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$	frequenza

Legge oraria

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(2\pi\ ft + \varphi)$$

Equazione differenziale

$$a + \omega^2 x = 0$$

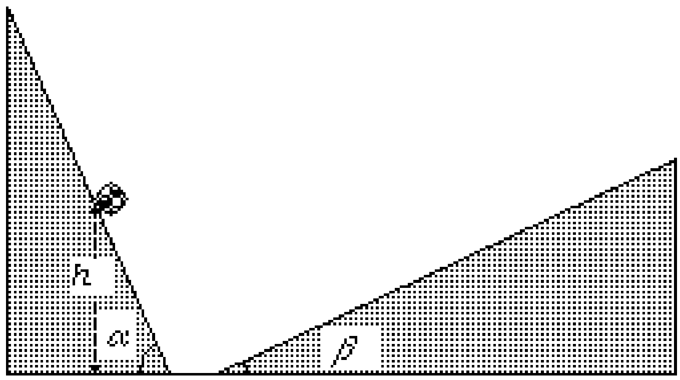
Unità di misura

Posizione, spostamento...	metro (m)
Velocità	metro al secondo (m/s) chilometro all'ora (km/h) 1 m/s = 3,6 km/h
Accelerazione	metro al secondo quadrato (m/s^2)
Angolo piano, fase	radiante (rad) 1 rad = 57,3°
Velocità angolare	radianti al secondo (rad/s)
Accelerazione angolare	radianti al secondo quadrato (rad / s^2)
Periodo	secondi (s)
Frequenza	hertz (Hz)

Problemi svolti

2.1. Una sferetta viene lasciata cadere dalla quota h = 30 cm lungo un piano inclinato liscio con α = 60° alla fine del quale risale lungo un secondo piano liscio con β = 30°. Calcolare il periodo di oscillazione della sferetta e stabilire se il moto è armonico.

(3)



———

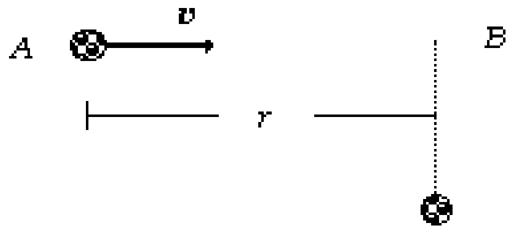
Essendo i piani lisci, la sferetta scivolerà senza rotolare e risalirà lungo il secondo piano portandosi alla stessa quota h, quindi ridiscenderà per riportarsi al punto di partenza e così via: si tratta di un moto oscillatorio periodico, ma non armonico, perché lungo i due piani il moto è alternativamente uniformemente accelerato e decelerato.
Il periodo del moto, ovvero la durata di un'intera oscillazione, è il tempo impiegato a ritornare al punto di partenza; poiché la sferetta deve scendere e risalire complessivamente per quattro tratti, dei quali due con inclinazione α e due con inclinazione β, il periodo sarà

$$T = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2}{\sin\beta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{0,6}{9,8}}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 1,56\,\text{s}.$$

2.2. Due sferette si trovano alla stessa quota nelle posizioni A e B a distanza r = 60 cm; la prima viene lanciata orizzontalmente con velocità v = 5 m/s nello stesso istante in cui la seconda viene lasciata cadere liberamente. Stabilire se, dove e quando le due sferette si incontreranno.

(3)



Che le sferette si incontrino è certo, dal momento che, mentre la prima descrive una parabola, la seconda scende in linea retta.
Per stabilire dove e quando avverrà l'incontro, teniamo conto che le equazioni parametriche del moto della prima sferetta sono

$$x_1 = v\,t, \qquad y_1 = \frac{1}{2}\,g\,t^2 = \frac{1}{2}\,g\,\frac{x_1^2}{v^2}\,,$$

mentre per la seconda sarà

$$y_2 = \frac{1}{2}\,g\,t^2,$$

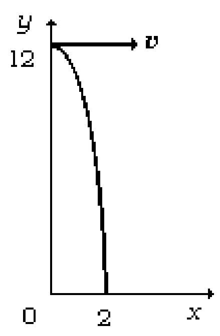
dove gli assi y sono stati orientati verso il basso con origine rispettivamente in A e in B. Ora, quando la prima sferetta incontra la seconda dovrà essere $x_1 = r$, perciò

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}\,g\,\frac{r^2}{v^2} = 4{,}9\,\frac{0{,}36}{25} = 7{,}1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 7{,}1\ \mathrm{cm}.$$

Tale quota verrà raggiunta dopo un tempo

$$t = \frac{r}{v} = \frac{0{,}6}{5} = 0{,}12\ \mathrm{s}.$$

2.3. Una sferetta puntiforme viene lanciata orizzontalmente dalla sommità di un profilo parabolico liscio di equazione $y = (-3\,x^2 + 12)$ m. Calcolare la minima velocità con la quale deve essere lanciata la sferetta per potersi staccare dal profilo. **(4)**



———

Possiamo scomporre il moto del punto nelle due direzioni x e y. Indicando con v_o la velocità orizzontale di lancio, sarà

$$x = v_o\, t.$$

Lungo l'asse y sarà invece

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + h.$$

Ne consegue:

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_o^2} + h.$$

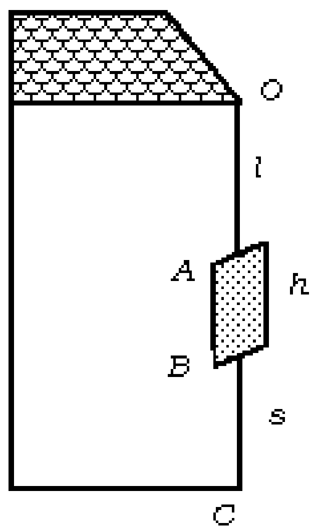
Perché il punto si stacchi dal profilo deve essere per $y = 0$ $x > x_o$, ovvero

$$x = v_o \sqrt{\frac{2h}{g}} > x_o,$$

$$v_o > x_o \sqrt{\frac{g}{2h}},$$

$$v_{min} = x_o \sqrt{\frac{g}{2h}} = 2\sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot 12}} = 1{,}28\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2.4. Una pallina da tennis cade liberamente dal tetto di una casa. Un uomo dietro a una finestra alta h = 1,2 m nota che la pallina impiega un tempo t_o= 0,1 s ad attraversare la finestra. La pallina prosegue la corsa rimbalzando sul sottostante marciapiede e riappare sul davanzale della finestra esattamente dopo t_1 = 2,0 s da quando era apparsa durante la caduta. Calcolare l'altezza della casa. **(4)**



L'altezza della casa è

$$H = l + h + s.$$

Il moto della pallina è rettilineo uniformemente accelerato da O a C, uniformemente decelerato da C verso l'alto. Indicando con v_A la velocità acquistata dalla pallina in A e applicando le leggi di Galileo sul moto dei gravi, si ha per i tratti OA e AB:

$$v_A^2 = 2gl,$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 + v_A t,$$

da cui

$$v_A = \frac{h - \frac{1}{2} g t^2}{t} = 11,5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Allora

$$l = \frac{v_A^2}{2g} = 6,8 \ \mathrm{m}.$$

Nell'intervallo di tempo tra le due successive apparizioni della pallina, essa ha percorso un tratto $h + 2s$; il tempo impiegato a percorrere il tratto s sarà quindi

$$t_s = \frac{2 - 0,1}{2} = 0,95 \ \mathrm{s}.$$

Infatti, se l'urto sul marciapiede è elastico, la pallina vi rimbalza ripartendo con la stessa velocità con cui è arrivata.
Ricaviamo ora v_B:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh,$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2g(h+l)} = \sqrt{19,6 \cdot 7,96} = 12,5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Applicando al tratto BC la legge oraria del moto, abbiamo

$$s = \frac{1}{2} g t_s^2 + v_B t_s = 4,9 \cdot (0,95)^2 + 12,5 \cdot 0,95 = 16,3 \ \mathrm{m}.$$

L'altezza della casa sarà allora

$$H = 24,3 \ \mathrm{m}.$$

2.5. Un oggetto fermo inizialmente nell'origine, si muove lungo l'asse x con legge $a^2 = 12\, v$. Ricavare la legge oraria del moto e verificare che essa soddisfa alla relazione data.

(3)

Per ricavare la legge oraria, integriamo l'espressione dell'accelerazione

$$a = \sqrt{12v} = 2\sqrt{3v} = \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{3v}} = 2dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int v^{-1/2}dv = \int 2dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2v^{1/2} = 2t + \text{costante.}$$

Ma, per $t = 0$, è $v = 0$, quindi la costante di integrazione è nulla; allora

$$\sqrt{\frac{v}{3}} = t,$$

$$v = 3\,t^2,$$

$$dx = 3\,t^2 dt$$

$$x = t^3 + \text{costante.}$$

Ma $x = 0$ per $t = 0$, quindi la legge oraria del moto è

$$x = t^3.$$

Verifica

$$v = \frac{dx}{dt} = 3\,t^2,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6\,t,$$

$$a^2 = 36\,t^2 = 12(3\,t^2) = 12\,v.$$

2.6. Ricavare la legge oraria del moto di un oggetto fermo inizialmente nell'origine che si muove lungo l'asse x con legge $a^2 = 4x$. **(3)**

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{x} = \frac{v\,dv}{dx},$$

da cui

$$v\,dv = 2\sqrt{x}\,dx,$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{4}{3}x^{3/2} + \text{costante.}$$

Essendo però $v = 0$ per $x = 0$, la costante di integrazione è nulla, quindi

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}x^{3/4} ,$$

$$\frac{dx}{x^{3/4}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt$$

$$2\,x^{1/4} = \sqrt{\frac{2}{3}}\;t + \text{costante} .$$

Ma, per t = 0, è x = 0, perciò anche questa costante di integrazione è nulla e allora

$$x = \frac{t^4}{36} .$$

2.7. Un oggetto inizialmente in quiete nell'origine dell'asse x lo percorre con accelerazione a = 1 – 4 t. Calcolare: a) la massima velocità raggiunta, b) l'istante in cui viene raggiunta, c) la posizione in cui viene raggiunta, d) la massima distanza dall'origine dell'oggetto. **(4)**

———

a), b) La massima velocità si ha quando è nulla l'accelerazione, che è la sua derivata prima rispetto al tempo; ciò accade per t_o = 0,25 s. Integrando l'accelerazione ricaviamo l'espressione della velocità in funzione del tempo:

$$v = \int a\,dt = \int (1 - 4\,t)\,dt = t - 2\,t^2.$$

$$v_{max} = v\,(t_o) = 0{,}13 \text{ m/s}.$$

c) Integrando $v\,(t)$ ricaviamo la legge oraria

$$x = \int (t - 2t^2)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3}t^3 ,$$

$$x(t_o) = 2{,}1 \text{ cm}.$$

d) La massima distanza dall'origine si ha quando si annulla la velocità, ovvero per t = 0 e per t = 0,5 s; la prima soluzione fornisce la minima distanza dall'origine che già sapevamo essere nulla all'istante iniziale; la seconda fornisce invece

$$x_{max} = 4{,}2 \text{ cm}.$$

2.8. Un oggetto si muove nel piano (x, y) con equazioni parametriche

$$x = t/2, \qquad y = t^2 - 6\,t + 8 \text{ (unità SI)}.$$

Determinare: a) l'equazione della traiettoria, b) le velocità nei punti in cui l'oggetto attraversa l'asse x, c) il raggio di curvatura nel punto di attraversamento più lontano dall'origine. **(5)**

---

a) Basta eliminare il tempo dalle due equazioni parametriche per ricavare

$$y = 4\,x^2 - 12\,x + 8.$$

b) Quando l'oggetto attraversa l'asse x deve essere $y = 0$, ovvero

$$x_1 = 1 \text{ m},\ x_2 = 2 \text{ m}.$$

L'attraversamento avverrà rispettivamente negli istanti

$$t_1 = 2 \text{ s},\ t_2 = 4 \text{ s}.$$

Ricaviamo ora la velocità in funzione del tempo derivando le due equazioni parametriche:

$$v_x = 1/2, \qquad v_y = 2\,t - 6,$$

da cui

$$v(t) = \sqrt{4t^2 - 24\,t + \frac{145}{4}}$$

e quindi

$$v\,(t_1) = 2{,}06 \text{ m/s},\ v\,(t_2) = 2{,}06 \text{ m/s}.$$

c) Il raggio di curvatura in un punto di una traiettoria curvilinea è espresso da

$$r = \frac{v^2}{a_c} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_t^2}},$$

dove a_c è l'accelerazione centripeta, a_t quella tangenziale e a quella totale.

Ora l'accelerazione tangenziale è la derivata del modulo della velocità istantanea rispetto al tempo, ovvero

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8\,t - 24}{\sqrt{16\,t^2 - 96\,t + 145}}$$

che nell'istante $t_2 = 4$ s vale $a_t = 1{,}94 \text{ m/s}^2$.

L'accelerazione totale vale invece $a = 2 \text{ m/s}^2$, come è facile verificare immediatamente derivando le componenti della velocità rispetto al tempo.

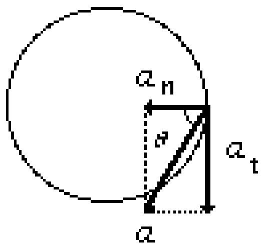
Allora sarà

$$r = \frac{v^2(t_2)}{\sqrt{4 - 3{,}76}} = 8{,}67\,\text{m}.$$

2.9. Una sferetta puntiforme, partendo da ferma, descrive un moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare γ = 2 rad/s^2. Calcolare l'angolo formato dall'accelerazione totale con quella centripeta dopo t = 2 s dall'inizio del moto. **(3)**

———

Con riferimento alla figura



$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\gamma\, r}{\omega^2 r} = \frac{\gamma}{\omega^2} = \frac{\gamma}{\gamma^2 t^2} = \frac{1}{\gamma\, t^2} = \frac{1}{2\cdot 4} = 0{,}125$$

e quindi

$$\theta = 7°7'.$$

2.10. Un aereo viaggia orizzontalmente a quota h = 5000 m con velocità v_o= =100 m/s, quando da una batteria contraerea posta sulla verticale dell'aereo viene sparato un colpo. Se il proiettile ha velocità v = 500 m/s, calcolare: a) quale deve essere l'angolo di alzo θ per poter colpire l'aereo, b) con quale ritardo si deve regolare il detonatore perché il proiettile possa esplodere nell'istante dell'urto, c) quale deve essere l'angolo di alzo θ' se il proiettile deve colpire l'aereo al culmine della traiettoria. **(5)**

———

a) La distanza orizzontale percorsa dal proiettile deve coincidere con la distanza percorsa dall'aereo nello stesso tempo t, quindi

$$v_o\, t = v \cos\theta\, t,$$

da cui

$$\cos\theta = v_o/v = 0{,}2,$$
$$\theta = 78°28'.$$

b) All'istante della collisione la quota del proiettile deve coincidere con la quota di volo h, perciò

$$h = -\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta} + x\tan\theta\ ,$$

$$g\,x^2 - 2v^2\sin\theta\ \cos\theta\ +\ 2v^2h\cos^2\theta\ =\ 0,$$

che ha per soluzioni

$$x = \frac{v^2\sin\theta\ \cos\theta \pm \sqrt{v^2\cos^2\theta\,(v^2\sin^2\theta - 2\,h\,g)}}{g} = \begin{cases}1153\ \text{m}\\ 8847\ \text{m}\end{cases}.$$

La prima soluzione corrisponde alla collisione mentre il proiettile è in fase di salita, la seconda quando, raggiunto, il culmine della traiettoria dopo aver mancato l'aereo, ridiscende. Avremo allora:

$$t = \frac{x_1}{v_o} = \frac{1153}{100} = 11{,}5\ \text{s}\ .$$

c) Al culmine della traiettoria, le due soluzioni devono coincidere, perciò il discriminante della precedente equazione di 2° grado deve annullarsi, ovvero

$$\sin\theta' = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{v} = \frac{\sqrt{98000}}{500} = 0{,}626$$

e quindi

$$\theta' = 38°\,46'.$$

2.11. Un grave viene lanciato dal punto A (x_o = 50 m, y_o = 100 m) con velocità iniziale v_o = 100 m/s. Calcolare: a) per quale angolo di alzo è massima la gittata, b) il valore di tale gittata massima. **(5)**

---

a) Scriviamo l'equazione della traiettoria tenendo conto che la posizione di lancio non è nell'origine degli assi

$$y - y_o = -\frac{1}{2}g\frac{(x-x_o)^2}{v_o^2\cos^2\alpha} + (x - x_o)\tan\alpha.$$

b) la gittata si ricava ponendo $y = 0$ nella precedente equazione, ovvero

$$g\,G^2 - v_o^2\,G\sin 2\alpha - 2y_o v_o^2\cos^2\alpha = 0,$$

da cui

$$G = \frac{v_o\cos\alpha}{g}\left(v_o\sin\alpha \pm \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha + 2\,g\,y_o}\right).$$

Osserviamo due fatti importanti: i) l'equazione ha due soluzioni, corrispondenti, quella positiva al punto in cui il grave atterra, quella negativa, priva di significato fisico, esprime matematicamente il fatto che la parabola che descrive la traiettoria del grave interseca l'asse x in due punti, uno dei quali alle spalle del punto di lancio; ii) per lancio dal suolo, ovvero per y_o = 0, le due radici dell'equazione ripropongono i ben noti valori

$$G = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g} \end{cases} .$$

Per stabilire l'angolo di gittata massima, dobbiamo derivare rispetto ad α l'espressione di G e annullarla, ottenendo, dopo qualche laborioso calcolo:

$$\sin \alpha_{max} = \frac{v_o}{\sqrt{2\,(v_o^2 + 2\,g\,y_o)}} .$$

Nel caso in esame abbiamo:

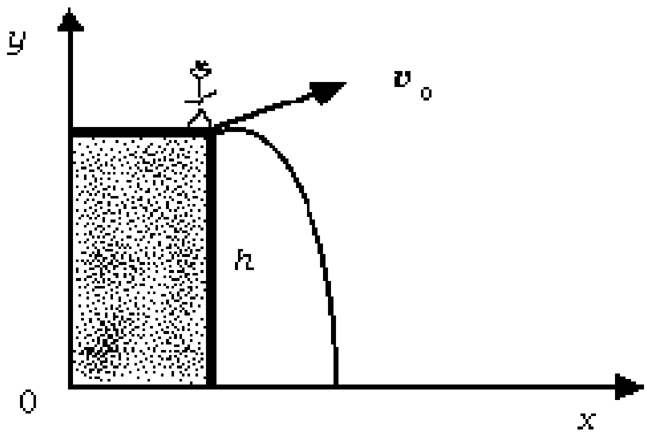
$$\alpha_{max} = \arcsin \frac{100}{\sqrt{2\ (10^4 + 19,6 \cdot 100)}} = 40°17' .$$

La gittata vale allora

$$G = \frac{100 \cdot 0,763}{9,8}\left(100 \cdot 0,646 + \sqrt{10^4 \cdot 0,418 + 19,6 \cdot 100}\right) = 1113 \text{ m} .$$

2.12. Un uomo posto su una sporgenza di altezza h = 60 m lancia un sasso con velocità iniziale v_o = 30 m/s e angolo di alzo α = 30°. Calcolare: a) la gittata, b) la velocità con cui il sasso tocca terra, c) il tempo di volo.

(4)



a) La gittata per lanci in quota è data (v. Problema **2.11**) da

$$G = \frac{v_o \cos\alpha}{g}\left(v_o \sin\alpha \pm \sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh} \right),$$

dove la radice negativa è priva di significato fisico, in quanto corrisponde alla seconda intersezione della parabola con l'asse x. Eseguendo i calcoli, si trova:

$$G = \frac{30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9,8}\left(30 \cdot 0,5 + \sqrt{900 \cdot 0,25 + 19,6 \cdot 60}\right) = 139 \text{ m},$$

b) La velocità con cui tocca terra il sasso si ottiene dalla composizione vettoriale della velocità orizzontale $v_x = v_o \cos\alpha = 26$ m/s, che resta costante durante l'intero volo, e della velocità verticale che si ricava da una delle leggi del moto uniformemente accelerato:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2074} = 45,5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

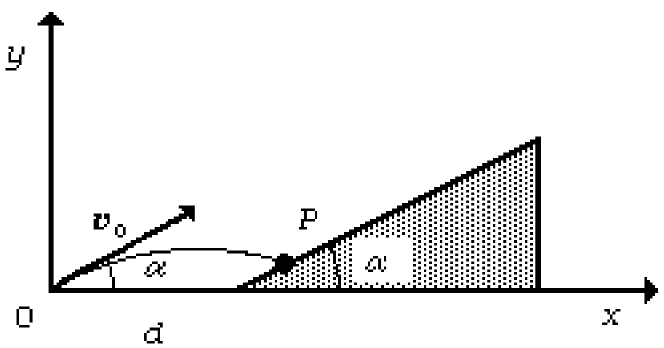
$$v_y = \sqrt{(v_o \sin\alpha)^2 + 2gh} = \sqrt{225 + 1176} = 37,4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Il metodo di calcolo più semplice del tempo di volo è di tener conto che il grave ha percorso una distanza orizzontale G con velocità costante v_x, cioè:

$$t_{volo} = \frac{G}{v_x} = \frac{139}{26} = 5,35 \text{ s}.$$

2.13. Un grave viene lanciato con angolo di alzo $\alpha = 30°$ e velocità $v_o = 10$ m/s e ricade su un piano inclinato dello stesso angolo α posto a distanza $d = 1$ m dall'origine. Calcolare: a) in quale punto del piano ricade il grave, b) con quale velocità, c) con quale angolo rispetto alla normale al piano inclinato.

(4)



a) Scriviamo l'equazione della traiettoria del grave:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha} + x \tan\alpha \ ,$$

che,intersecata con la retta che rappresenta il profilo del piano inclinat

$$y = (x - d) \tan\alpha \ ,$$

fornisce

$$x = v_o \sqrt{\frac{d \sin 2\alpha}{g}} = 2{,}97 \ \text{m} \ .$$

b) La quota del punto di impatto sul piano è

$$y = (x - d) \tan\alpha = 1{,}97 \cdot 0{,}58 = 1{,}14 \text{ m}.$$

Per calcolare v_P applichiamo una delle leggi di Galileo sul moto uniformemente accelerato:

$$v_P = \sqrt{v_o^2 - 2g\,y_P} = 8{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad .$$

c) Per calcolare l'angolo β di incidenza del grave sul piano inclinato, basta calcolare dy/dx nel punto (x_P, y_P)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \tan\beta = -\frac{g\,x}{(v_o \cos\alpha)^2} + \tan\alpha = 0{,}19 \ ,$$

da cui

$$\beta = 10° \, 45' \quad .$$

2.14. Un punto materiale si muove nel piano (x,y) con equazioni parametriche $x = 3\,t + 1$, $y = 2\,t^2 + 4$ (in unità SI). Calcolare: a) l'equazione della traiettoria, b) l'accelerazione tangenziale per t = 1 s, c) la velocità per t = 1 s, d) l'accelerazione all'istante t = 2 s e) l'accelerazione centripeta per t = 1 s.

(4)

---

a) Ricaviamo da x il parametro t:

$$t = \frac{x - 1}{3}$$

e lo sostituiamo nell'espressione di y, ottenendo

$$y = \frac{2}{9}(x^2 - 2x + 19).$$

b) L'accelerazione tangenziale a_t è data dalla derivata del modulo v della velocità istantanea rispetto al tempo; ricaviamo perciò l'espressione della velocità in funzione del tempo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9 + 16\,t^2}\,,$$

la cui derivata rispetto al tempo fornisce

$$a_t = \frac{16\,t}{\sqrt{9 + 16\,t^2}}\,,$$

che all'istante $t = 1$ s vale

$$a_t = 3{,}2 \text{ m/s}^2.$$

c) Dall'espressione della velocità ricavata in b) si ha subito

$$v\,(t = 1 \text{ s}) = 5 \text{ m/s}.$$

d) Derivando due volte rispetto al tempo le equazioni parametriche, si ha

$$a_x = 0,\ a_y = 4 \text{ m/s}^2,$$

pertanto l'accelerazione è

$$a = 4 \text{ m/s}^2.$$

e) Ricaviamo l'accelerazione centripeta come differenza vettoriale tra l'accelerazione a e quella tangenziale, ovvero

$$a_c = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{16 - 10{,}24} = 2{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

2.15. Un corpo percorre l'asse x con accelerazione $a = -\ k\,v^2$, con k costante. Se per $t = 0$ il corpo passa dall'origine con velocità u, ricavare: a) le dimensioni di k, b) la legge oraria della velocità, c) dopo quanto tempo la velocità si riduce a 1/e del valore iniziale, d) a quale distanza dall'origine, e) la legge oraria del moto. **(4)**

———

a)

$$\left[k\right] = \frac{\left[a\right]}{\left[v^2\right]} = \frac{\left[\text{L}\,\text{T}^{-2}\right]}{\left[\text{L}^2\,\text{T}^{-2}\right]} = \left[\text{L}^{-1}\right].$$

b) Si deve integrare rispetto al tempo l'espressione data, ovvero

$$\frac{dv}{dt} = -k\,v^2\,;$$

$$\frac{dv}{v^2} = -k\,dt,$$

$$-\frac{1}{v}=-k\,t+\text{costante},$$

ma, essendo per $t = 0$, $v = u$:

$$\text{costante}=-\frac{1}{u},$$

perciò

$$-\frac{1}{v}=-k\,t-\frac{1}{u},$$

$$v=\frac{u}{1+u\,k\,t}.$$

c) Basta porre $v = u/\mathrm{e}$ nell'espressione ricavata in b) per avere subito

$$t_o=\frac{\mathrm{e}-1}{k\,u}.$$

d), e) Si deve prima ricavare la legge oraria del moto integrando la legge oraria della velocità, quindi sostituire in tale legge il valore t_o.
Dopo brevi calcoli si ottiene:

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+u\,k\,t),$$

$$x(t_o)=\frac{1}{k}.$$

2.16. Un punto materiale inizialmente in quiete sull'asse x con ascissa x_o si muove con legge $v = k\,x^2$. Ricavare le leggi orarie di posizione, velocità e accelerazione in funzione di k e di x_o. **(3)**

È

$$\frac{dx}{dt}=k\,x^2,$$

$$\frac{dx}{x^2}=k\,dt,$$

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int k\,dt,$$

$$-\frac{1}{x}=k\,t+\text{costante}.$$

Essendo, per $t = 0$, $x = x_o$, la costante varrà $-1/x_o$, quindi

$$\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=k\,t,$$

$$x = \frac{x_0}{1 - k x_0 t},$$

$$v = \frac{k x_0^2}{(1 - k x_0 t)^2},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2k^2 x_0^3}{(1 - k x_0 t)^3}.$$

2.17. Un'auto sta viaggiando su strada rettilinea con velocità u = 72 km/h quando il guidatore devia improvvisamente a destra di 90° riducendo la velocità a v = 18 km/h in t = 3 s. Calcolare: a) la decelerazione tangenziale dell'auto, b) la variazione del modulo della velocità, c) il modulo della variazione di velocità **(3)**

---

a) La decelerazione tangenziale è espressa dalla derivata rispetto al tempo del modulo della velocità, ovvero sarà, in termini finiti,

$$a_t = \frac{v - u}{t} = -\frac{54000}{3600 \cdot 3} = -5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) La variazione del modulo della velocità è ovviamente

$$v - u = -54\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = -15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Il vettore variazione di velocità è dato da

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u},$$

e il suo modulo è espresso dalla diagonale del rettangolo di lati $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, cioè

$$\Delta v = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{400 + 25} = 20,6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 74,2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

2.18. Un corpo parte in quiete dall'origine con accelerazione costante a = 10 m/s^2. Calcolare: a) la velocità dopo una distanza s = 80 m, b) la velocità media nel 4° secondo, c) la distanza percorsa nel 5° secondo, d) il tempo impiegato a raggiungere la velocità v_1 = 72 km/h. **(4)**

---

a) Applicando una delle tre leggi di Galileo sul moto uniformemente accelerato, si ha:

$$v = \sqrt{2\,a\,s} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 80} = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Dobbiamo calcolare la media aritmetica tra la velocità alla fine del terzo secondo e quella alla fine del quarto secondo, ovvero:

$$v_{3,4} = \frac{a(t_1 + t_2)}{2} = 5 \cdot 7 = 35 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c)

$$d_5 = \frac{a}{2}(5^2 - 4^2) = 45 \ \text{m}.$$

d) Trasformiamo prima la velocità v_1 in m/s, ottenendo v_1 = 20 m/s; quindi

$$t = \frac{v_1}{a} = \frac{20}{10} = 2 \ \text{s}.$$

2.19. Un fucile a quota h = 1,5 m dal suolo spara orizzontalmente un proiettile che colpisce il terreno a distanza d = 600 m; nello stesso istante dello sparo dal fucile si stacca un bullone. Calcolare: a) la velocità iniziale del proiettile, b) la velocità con cui tocca terra il bullone, c) dopo quanto tempo tocca terra il bullone, d) dopo quanto tempo tocca terra il proiettile.

(4)

---

a) La traiettoria del proiettile è parabolica e la sua equazione è

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_o^2} + h,$$

dove v_o è la velocità iniziale. Ponendo in tale equazione $x = d$ per $y = 0$, otteniamo

$$v_o = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = 600\sqrt{\frac{9,8}{3}} = 1084,4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \qquad (1)$$

b) Il bullone si muove in caduta libera, perciò, dal momento che la sua velocità iniziale è nulla, sarà:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{19,6 \cdot 1,5} = 5,42 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \qquad (2)$$

c) Il tempo di volo del bullone sarà

$$t_b = \frac{v}{g} = 0,55 \ \text{s}.$$

d) Il tempo di volo del proiettile si può calcolare in due modi diversi studiandone il moto verticale oppure quello orizzontale; sapendo che il moto orizzontale è rettilineo uniforme e che il proiettile tocca terra a distanza d dal punto di sparo partendo con velocità v_o, avremo

$$t_p = \frac{d}{v_o} = \frac{600}{1084,4} = 0,55 \text{ s.}$$

Il fatto che i due tempi di volo coincidano non è casuale: basti tener presente che se ricaviamo dalle (1) e (2) le espressioni di h, otteniamo

$$\frac{v}{g} = \frac{d}{v_o},$$

che sono proprio le due espressioni dei tempi di volo.

2.20. Un punto materiale con posizione iniziale x_o si muove con velocità $v = kx$, con k costante. Stabilire: a) la legge oraria del moto, b) la legge oraria della velocità, c) se e sotto quali condizioni il moto può essere armonico semplice. **(4)**

---

a) Sarà

$$\frac{dx}{dt} = k\,x,$$

da cui

$$\frac{dx}{x} = k\,dt,$$

$$\ln x = k\,t + \text{costante}$$

$$x = A\,\mathrm{e}^{kt}$$

e la costante A si determina immediatamente sapendo che per $t = 0$ è $x = x_o$; ne consegue la legge oraria del moto

$$x = x_o \mathrm{e}^{kt}.$$

b) Essendo $v = k\,x$, la legge oraria della velocità sarà:

$$v = k\,x_o\,\mathrm{e}^{kt}.$$

c) Ricaviamo l'espressione dell'accelerazione derivando rispetto al tempo la legge oraria della velocità; otteniamo:

$$a = \frac{dv}{dt} = k^2 x_0 \mathrm{e}^{kt} = k^2 x.$$

In un moto armonico semplice la costante di proporzionalità tra accelerazione e posizione del punto ***deve essere negativa***, perciò il moto in esame non potrà essere armonico semplice per nessun valore di k.

2.21. Le equazioni parametriche del moto di un corpo puntiforme sono:

$$x = 5 \sin t, \qquad y = 5 \cos t \qquad \text{(in unità SI).}$$

a) Ricavare l'equazione della traiettoria, b) il periodo del moto, c) l'accelerazione tangenziale, d) la velocità periferica. **(3)**

a) Quadrando le due equazioni parametriche e sommando membro a membro, si vede che la traiettoria è una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio $r = 5$ m; infatti risulta

$$x^2 + y^2 = 25.$$

b) Il moto sui due assi è armonico semplice con velocità angolare $\omega = 1$ rad/s e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \text{ s}.$$

c) Il moto del corpo lungo la circonferenza è circolare uniforme e l'accelerazione tangenziale è nulla.
d) La velocità periferica vale

$$v = \omega\, r = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.22. Un punto percorre l'asse x con legge oraria $x(t) = (t^2 + t - 56)$ m, con t in secondi. Calcolare: a) la velocità iniziale, b) la posizione iniziale, c) la velocità dopo 3 s, d) l'accelerazione dopo 1 s, e) in quale istante il punto ripassa dall'origine. **(4)**

a) Risulta

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t + 1,$$

perciò

$$v_0 = 1 \text{ m/s}.$$

b) Sostituendo $t = 0$ nella legge oraria data, si ricava

$$x_0 = -56 \text{ m}.$$

c) Per quanto ricavato in a):

$$v_3 = 7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) Derivando l'espressione di v rispetto al tempo, si ricava che l'accelerazione è costante (come si poteva notare dalla dipendenza quadratica di x dal tempo) e vale sempre 2 m/s^2.

e) Nell'origine è $x = 0$, pertanto dalla legge oraria data deve essere

$$t^2 + t - 56 = 0,$$

le cui soluzioni sono $t_1 = -8$ s e $t_2 = 7$ s.
La risposta cercata è ovviamente la seconda.

2.23. Se un grave viene lanciato nel vuoto con velocità iniziale v = 40 m/s e angolo di alzo α = 60°, calcolare il raggio di curvatura della traiettoria in corrispondenza del culmine. **(3)**

Al culmine della traiettoria l'accelerazione centripeta coincide con l'accelerazione di gravità, mentre la velocità del grave vale $v \cos \alpha$, perciò

$$g = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{r},$$

e quindi

$$r = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{1600 \cdot \frac{1}{4}}{9{,}8} = 40{,}8 \text{ m}.$$

2.24. Due proiettili vengono lanciati dal suolo nello stesso piano verticale con velocità iniziali rispettivamente v_1 = 100 m/s e v_2 = 150 m/s con un ritardo di t = 5 s il secondo dal primo; se l'angolo di alzo del primo è $\alpha = \pi/4$, calcolare: a) quale deve essere l'angolo di alzo β del secondo proiettile perché i due proiettili si possano incontrare; b) dopo quanto tempo dal lancio del primo; c) a quale distanza dal punto di lancio; d) a quale quota. **(5)**

a) Se il primo proiettile viaggia per un tempo t, il secondo viaggia per un tempo $t - t_o$, perciò, tenendo conto che nel punto di incontro devono coincidere sia le ascisse sia le ordinate, avremo:

$$y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_1 t \sin \alpha,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} g (t - t_o)^2 + v_2 (t - t_o),$$

$$x_1 = v_1 t \cos \alpha,$$

$$x_2 = v_2 (t - t_o) \cos \beta.$$

Risolvendo il sistema, si ricava:

$$\beta = 25{,}1\ °, -\ 40{,}96\ °.$$

b) La sola soluzione accettabile è la prima; sostituendo tale valore di β dopo aver uguagliato x_1 e x_2, si ottiene

$$t = 10{,}4 \text{ s};$$

c) sostituendo tale valore nell'espressione di $x_1 = x_2$, si ricava

$$x_1 = x_2 = 735{,}4 \text{ m};$$

d) infine, sostituendo t nelle espressioni di y_1 e y_2, si ottiene:

$$y_1 = y_2 = 205{,}4 \text{ m}.$$

2.25. Un proiettile viene lanciato con angolo di alzo $\theta = 30°$ e velocità iniziale v_o = 200 m/s. Calcolare: a) dopo quanto tempo il vettore velocità e il vettore accelerazione formano un angolo di 30°; b) a quale distanza dal punto di lancio.

(4)

---

a) Le equazioni parametriche del moto del proiettile sono:

$$y = -\frac{g\,t^2}{2} + v_o\,t\ \sin\theta\ ,$$
$$x = v_o\,t\,\cos\theta\ ,$$

L'equazione della traiettoria è:

$$y = -\frac{g\,x^2}{2\,v_o^2\cos^2\theta} + x\ \tan\theta \quad .$$

Tenendo conto che l'accelerazione del proiettile non è altro che g, diretta verticalmente verso il basso, quindi parallela alla componente y della velocità, basta imporre:

$$-\frac{v_x}{v_y} = \tan 30° = \frac{v_o\cos\theta}{-v_o\sin\theta + g\ t} = 0{,}58\ ;$$

$$t = \frac{v_o}{g}\left(\frac{0{,}58\ \sin\theta + \cos\theta}{0{,}58\ g}\right) = \frac{200\,(0{,}58\cdot 0{,}5 + 0{,}865)}{0{,}58\cdot 9{,}8} = 40{,}6\ \mathrm{s} \quad .$$

b) Ne consegue:

$$x = 200\cdot 40{,}6\cdot 0{,}865 = 7\ \mathrm{km} \quad .$$

2.26. Due palline si trovano sulla stessa verticale e vengono lanciate orizzontalmente nello stesso istante, la prima dalla quota h_1 = 10 m con velocità v_1 = 20 m/s, la seconda dalla quota h_2 = 40 m con velocità v_2 = 10 m/s. Calcolare: a) la velocità con cui toccano terra le due palline, b) i tempi di volo delle due palline, c) le gittate G_1 e G_2.

(3)

---

a) Applicando una delle leggi di Galileo, abbiamo

$$v_1' = \sqrt{2\,g\,h_1} = 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ , v_2' = \sqrt{2\,g\,h_2} = 28\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

b) Per i tempi di volo applichiamo un'altra delle leggi di Galileo:

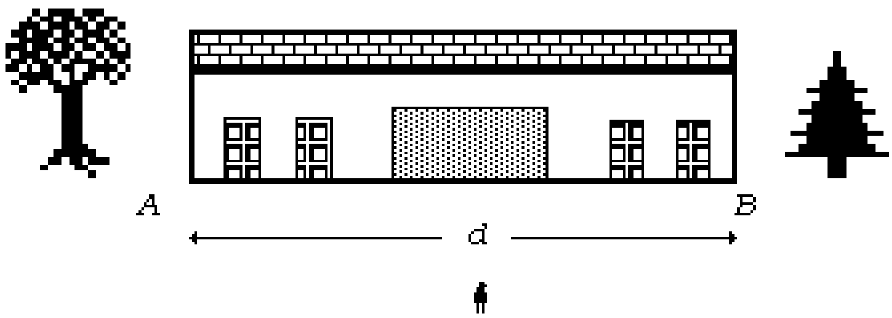
$$t_1 = \frac{v_1'}{g} = 1,43 \text{ s}, \; t_2 = \frac{v_2'}{g} = 2,86 \text{ s}.$$

c) Si tenga conto che il moto orizzontale delle due palline è rettilineo uniforme; in tal caso:

$$G_1 = v_1 t_1 = 28,6 \text{ m}, \qquad G_2 = v_2 t_2 = 28,6 \text{ m}.$$

2.27. Una guardia giurata passeggia avanti e indietro con velocità costante v = 80 cm/s davanti a una banca spostandosi in linea retta dall'estremo A all'estremo B distanti d = 20 m. Stabilire il tipo di moto della guardia e i suoi parametri fondamentali.

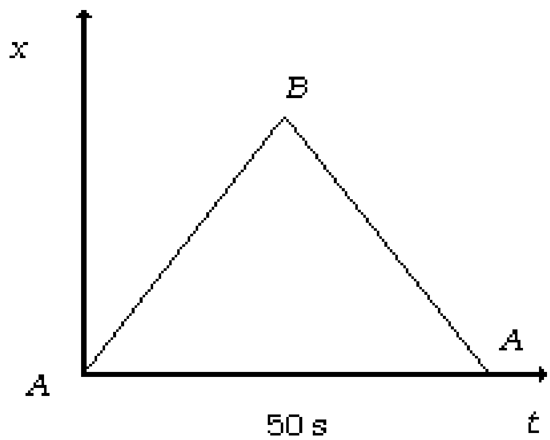
(3)



Si tratta chiaramente di un moto periodico, il cui periodo è rappresentato dal tempo impiegato dalla guardia per percorrere la distanza ABA, ovvero 2 d; trascurando il tempo necessario per invertire il senso di marcia, tale periodo è

$$T = \frac{2d}{v} = \frac{40}{0,8} = 50 \text{ s}.$$

Tale moto è però periodico, ma non armonico perché la velocità si mantiene costante per annullarsi nei punti di inversione. Il grafico orario del moto è riportato nella figura sottostante.



2.28. Un punto materiale inizialmente in quiete descrive una traiettoria circolare di raggio r = 20 cm con accelerazione angolare costante γ = 4 rad/s^2. Calcolare, all'istante t = 5 s: a) l'accelerazione centripeta, b) l'angolo di rotazione, c) l'accelerazione tangenziale, d) l'accelerazione totale, e) la velocità angolare.

(4)

---

a) L'accelerazione centripeta è data da

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r = \gamma^2 t^2 r,$$

avendo tenuto conto che nel moto circolare uniformemente accelerato è $\omega = \gamma\, t$. Allora

$$a_c = 16 \cdot 25 \cdot 5 = 2000 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) L'angolo di rotazione, per la legge oraria del moto circolare uniformemente accelerato, è

$$\theta = \frac{1}{2}\gamma\, t^2 = 50 \ \text{rad}.$$

c) L'accelerazione tangenziale è data da

$$a_t = \gamma\, r = 4 \cdot 5 = 20 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

d)

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 2000 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

e)

$$\omega = \gamma\, t = 20 \text{ rad/s}.$$

$$\omega_o = \omega - \gamma\, t = \sqrt{\frac{a_c}{r}} - \gamma\, t = \sqrt{\frac{10}{0,2}} - 1,5 \cdot 2 = 4,1 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

2.29. Un punto in moto circolare uniformemente accelerato su una circonferenza di raggio r = 20 cm dopo t = 2 s dall'inizio del moto ha accelerazione tangenziale a_t = 0,3 m/s^2 e accelerazione centripeta a_c = 10 m/s^2. Calcolare: a) l'accelerazione angolare, b) la velocità angolare iniziale, c) l'angolo descritto nei 2 s. **(3)**

---

a) Essendo l'accelerazione tangenziale data da $a_t = \gamma\, r$, si ricava immediatamente

$$\gamma = \frac{a_t}{r} = \frac{0,3}{0,2} = 1,5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

b) Nel moto circolare uniformemente accelerato è

$$\omega = \omega_o + \gamma t,$$

ma è anche

$$a_c = \omega^2 r,$$

quindi

$$\omega_o = \omega - \gamma t = \sqrt{\frac{a_c}{r}} - \gamma t = \sqrt{\frac{10}{0,2}} - 1,5 \cdot 2 = 4,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

c) Dalla legge oraria del moto:

$$\theta = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \omega_o t = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 4 + 4,1 \cdot 2 = 11,2 \text{ rad}.$$

2.30. Un ciclista percorre con velocità costante una pista circolare di raggio r = 60 m in t = 24 s. Calcolare: a) l'accelerazione centripeta, b) la velocità media scalare dopo un quarto di giro, c) la velocità angolare, d) il modulo del vettore velocità media dopo un quarto di giro, e) l'accelerazione tangenziale.

(3)

---

a), b) La velocità media scalare è la stessa in qualunque punto della pista ed è data dal rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato, ovvero

$$v = \frac{2\pi r}{t} = \frac{6,28 \cdot 60}{24} = 15,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 56,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ne consegue che

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(15,7)^2}{60} = 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{15,7}{60} = 0,26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

d) La domanda è stata posta con il preciso scopo di evidenziare l'assoluta mancanza di significato fisico del vettore velocità media; infatti, per definizione, tale vettore è il rapporto tra il vettore spostamento e il tempo impiegato; dopo un quarto di giro il modulo del vettore spostamento è, come si vede in figura, rappresentato dal segmento AB, di lunghezza 84,9 m, pertanto troveremmo il risultato

$$|\boldsymbol{v}_m| = \frac{84,9}{6} = 14,1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

sensibilmente diverso dalla velocità media scalare calcolata in a).
Il vettore $\boldsymbol{v}_m$ è utile solo ai fini della individuazione della direzione e del verso di un moto, ma la effettiva rapidità di un moto è espressa dallo scalare v.

e) In un moto circolare uniforme non esiste accelerazione tangenziale!

2.31. Un oggetto viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v_0= 30 m/s. Trascurando ogni attrito, calcolare: a) il tempo di volo, b) la quota massima raggiunta, c) la velocità dopo 3 s, d) la quota raggiunta dopo 2 s, e) a quale quota si trova dopo 5 s. **(4)**

———

a) Il tempo di volo non è il tempo necessario per arrivare al culmine, come molti studenti credono, ma, come dice il nome, il tempo totale per cui l'oggetto resta in volo, ovvero il doppio del tempo di salita

$$t_v = \frac{2v_0}{g} = \frac{60}{9,8} = 6,1 \text{ s.}$$

b) Da una delle tre leggi di Galileo sul moto uniformemente accelerato, tenendo conto che al culmine il grave si ferma istantaneamente, abbiamo

$$0 = v_0^2 - 2gH,$$

da cui

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{900}{19,6} = 45,9 \text{ m.}$$

c) Applicando un'altra delle leggi di Galileo, abbiamo

$$v_3 = v_0 - g\,t = 30 - 29,4 = 0,6 \text{ m/s.}$$

d) Dalla terza legge di Galileo:

$$h_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = 40,4 \text{ m.}$$

e) Riapplicando la stessa legge, troviamo

$$h_5 = 27,5 \text{ m.}$$

2.32. La legge oraria del moto di una particella è

$$\boldsymbol{r} = 3\,t^2\boldsymbol{i} + 2\,t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \qquad \text{(in unità SI).}$$

Calcolare: a) la velocità dopo 2 s, b) la distanza dall'origine dopo 1 s, c) la distanza percorsa nell'11° secondo di moto.

(4)

———

a) Derivando rispetto al tempo il vettore posizione, ricaviamo il vettore velocità:

$$\boldsymbol{v} = 6\,t\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j},$$

quindi

$$v = \sqrt{36t^2 + 4} = \sqrt{148} = 12{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b)

$$r = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1} = \sqrt{14} = 3{,}7\ \text{m}\ .$$

c) La distanza richiesta si deve calcolare come differenza tra quella percorsa nei primi 11 s e quella percorsa nei primi 10 s, ovvero

$$d = \sqrt{(x_{11} - x_{10})^2 + (y_{11} - y_{10})^2 + (z_{11} - z_{10})^2} = 63\ \text{m}.$$

2.33. Un'auto percorre in autostrada un tratto rettilineo s_1 = 1 km con velocità costante v_1 = 80 km/h, quindi un secondo tratto rettilineo s_2 = 1 km con velocità costante v_2 = 120 km/h. Trascurando il tempo impiegato per accelerare, calcolare la velocità media nel tratto di 2 km. **(4)**

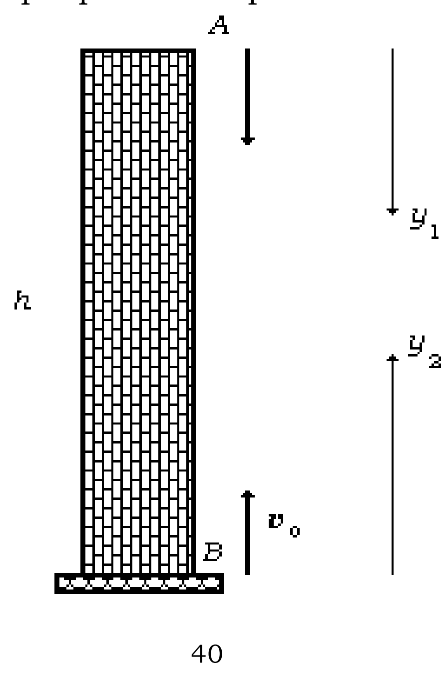
———

Davanti a una domanda del genere, qualsiasi profano risponde che la velocità media è 100 km/h, perché si limita a calcolare la media aritmetica delle due velocità, ma la velocità media definita in fisica è tutt'altra cosa.
Infatti, dobbiamo scrivere

$$v_{\text{m}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 96\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

La velocità media fisica, che è poi quella reale, risulta inferiore alla velocità media aritmetica e questo spiega perché non tornano i conti dei tempi impiegati all'automobilista che calcola la prima al posto della seconda!

2.34. Un ragazzo sul tetto di una torre alta h = 60 m lascia cadere liberamente un sasso nello stesso istante in cui un suo amico ai piedi della torre scaglia sulla stessa verticale un secondo sasso con velocità iniziale v_{o} = 20 m/s. Stabilire a quale distanza dal suolo e dopo quanto tempo i due sassi si scontrano. **(4)**



Scriviamo le leggi orarie di moto dei due sassi avendo l'avvertenza di assumere per il primo ragazzo un asse y orientato verso il basso e per il secondo uno orientato verso l'alto; in tali condizioni sarà

$$y_1 = \frac{1}{2} g t^2,$$
$$y_2 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_o t.$$

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$h = y_1 + y_2 = v_0 t$$

da cui

$$t = \frac{h}{v_o} = \frac{60}{10} = 6 \text{ s.}$$

Avremo quindi per il punto di incontro

$$y_1 = 4,9 \cdot 36 = 176,4 \text{ m}, \qquad y_2 = -176,4 + 10 \cdot 6 = -116,4 \text{ m.}$$

Pare quindi che il problema non abbia soluzioni, dal momento che il punto d'incontro si trova 116,4 m sotto il piede della torre; ma le cose non stanno così: la velocità iniziale del secondo sasso è talmente bassa che esso raggiunge il culmine prima che il primo sasso sia arrivato, inverte il verso di moto ed entrambi cadono verso il basso fino a quando il primo raggiunge il secondo. Nell'impostare il problema non abbiamo fatto alcun cenno all'esistenza del terreno, pertanto i calcoli hanno fornito una risposta comunque corretta, come se i due ragazzi si trovassero per esempio uno al 60° piano di un grattacielo e l'altro al 30°: i due sassi si scontreranno molto più in basso, forse verso il 5° piano.

2.35. Un corpo puntiforme percorre una circonferenza di raggio r = 20 cm con legge oraria

$$\theta = 3t^3 - 1 \quad \text{(unità SI).}$$

Calcolare, dopo t = 1 s dall'inizio del moto, a) l'accelerazione totale del corpo, b) il numero di giri descritti.

(4)

a) Il corpo è soggetto a un'accelerazione tangenziale e a una centripeta; per poterle esplicitare, dobbiamo ricavare dalla legge oraria sia la velocità angolare sia l'accelerazione angolare, che risultano

$$\omega = 6t^2, \quad \gamma = 12t.$$

L'accelerazione totale vale allora:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\gamma^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\gamma^2 + \omega^4} = r\sqrt{144\,t^2 + 1296\,t^8}.$$

Per $t = 1$ s, abbiamo

$$a = 7{,}59 \text{ m/s}^2.$$

b) Questa domanda è pericolosa, infatti non ci si può limitare a porre $t = 1$ s nella legge oraria, in quanto in tal modo troviamo la posizione angolare in tale istante; dobbiamo invece calcolare qual è stato lo spostamento angolare del corpo, scrivendo

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0 = 2\,\text{rad} - (-1\,\text{rad}) = 3\,\text{rad},$$

corrispondenti a 0,48 giri.

2.36. A quale ora dopo la mezzanotte le sfere di un orologio formano per la prima volta a) un angolo di 90°, b) un angolo di 180°?

(4)

Premesso che il moto delle sfere è rotatorio uniforme e che le velocità angolari per quella delle ore, ω_o, e per quella dei minuti, ω_m, sono

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{12\cdot 3600} = 1{,}45\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_m = \frac{2\pi}{3600} = 1{,}74\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

le leggi orarie delle due sfere sono

$$\theta_o = \omega_o t, \quad \theta_m = \omega_m t.$$

a) Basta scrivere

$$\theta_m - \theta_o = \frac{\pi}{2},$$

per ricavare

$$t_{90°} = \frac{\pi}{2}\frac{12\cdot 3600}{11\cdot 2\pi} = 981{,}82\text{ s} = 16{,}36\text{ min} = 16\text{ min}\,22\text{ s}.$$

Le sfere sono perpendicolari alle 00 h 16 min 22 s.

b) Ora la differenza dei due angoli è esattamente π, perciò, senza ripetere i calcoli, sarà

$$t_{180°} = 32 \text{ min } 44 \text{ s}$$

e l'ora richiesta sarà 00 h 32 min 44 s.

2.37. Un sasso lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_o, dopo t_1 = 4 s si trova alla quota h = 6 m. Calcolare: a) la velocità iniziale, b) la quota massima raggiunta, c) il tempo di salita.

(3)

---

a) Scriviamo la legge oraria del moto:

$$h = -\frac{1}{2} g\, t_1^2 + v_o t_1,$$

da cui

$$v_0 = \frac{h + \frac{1}{2} g\, t_1^2}{t_1} = \frac{6 + 4{,}9 \cdot 16}{4} = 21{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(21{,}1)^2}{19{,}6} = 22{,}7\ \text{m}.$$

c)

$$t = \frac{v_0}{g} = 2{,}15\ \text{s}.$$

2.38. Un punto materiale descrive una traiettoria con legge oraria $P\,(t^2,\ 1 + t)$, dove le distanze sono in metri e i tempi in secondi. Calcolare: a) l'equazione della traiettoria, b) la velocità all'istante t_1 = 2 s.

(4)

---

a) Le equazioni parametriche del moto sono

$$x = t^2,\ y = 1 + t,$$

per cui, eliminando il tempo, si ricava l'equazione della traiettoria

$$x = y^2 - 2\,y + 1,$$

che è una parabola ad asse orizzontale.

b) Derivando rispetto al tempo le equazioni parametriche, ricaviamo le componenti della velocità

$$v_x = 2\,t,\ v_y = 1,$$

per cui all'istante t_1 = 2 s sarà

$$v = \sqrt{4t^2 + 1} = \sqrt{17} = 4{,}12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.39. Un punto materiale inizialmente in quiete nell'origine dell'asse x percorre tale asse con legge

$$a = 40\,(1 - 2\,t)\ \mathrm{m/s}^2.$$

Calcolare: a) il valore della massima velocità, b) quando e dove si raggiunge la massima velocità, c) la massima distanza dall'origine.

(5)

---

a) L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, quindi la massima velocità si avrà annullando l'accelerazione, ovvero per t = 0,5 s.
Integrando l'accelerazione ricaviamo per la velocità l'espressione

$$v = 40\,t - 40\,t^2,$$

che per t = 0,5 s vale

$$v_{max} = 10\ \mathrm{m/s}.$$

b) Integrando la velocità ricaviamo la legge oraria del moto

$$x = 20\,t^2 - \frac{40}{3}t^3,$$

e per t = 0,5 s si ricava

$$x\,(v_{max}) = 3{,}3\ \mathrm{m}.$$

c) La massima distanza dall'origine si ricava annullando la velocità, ciò che avviene per t = 0 e per t = 1 s; mentre all'istante iniziale il punto si trova nell'origine, per t = 1 s abbiamo

$$x_{max} = 6{,}67\ \mathrm{m}.$$

2.40. Se un oggetto cade liberamente in verticale, calcolare la distanza percorsa nel quarto secondo di discesa.

(3)

La legge di caduta libera di un grave è $y = \frac{1}{2}gt^2$, tuttavia non possiamo applicarla in questa forma per rispondere alla domanda, in quanto il grave arriva all'inizio del 4° secondo con una velocità derivantegli dai primi 3 s di caduta. Possiamo allora procedere in due diversi modi, che ovviamente dovranno fornire lo stesso risultato; il primo è quello di calcolare la distanza richiesta come la differenza tra la distanza percorsa nei primi 4 s e quella percorsa nei primi 3 s, ovvero:

$$d = \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,(16-9) = 34{,}3\,\mathrm{m};$$

il secondo, leggermente più lungo, richiede di calcolare la velocità v_3 del grave al termine dei primi 3 s e di utilizzarla poi nella legge del moto per calcolare d. In altri termini:

$$v_3 = g\,t = 9{,}8 \cdot 3 = 29{,}4 \text{ m/s}$$

e quindi

$$d = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 1^2 + v_3 \cdot 1 = 4{,}9 + 29{,}4 \cdot 1 = 34{,}3\,\text{m}.$$

2.41. Un oggetto puntiforme percorre l'asse x con legge oraria

$$x = t^2\,(1 - 2\,t) \text{ (in unità SI).}$$

Calcolare: a) la massima distanza dall'origine, b) la massima velocità, c) in quale istante l'accelerazione è nulla, d) a quale distanza dall'origine l'oggetto raggiunge la massima velocità.

(4)

---

a) Derivando la legge oraria rispetto al tempo, otteniamo

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 6t^2,$$

che si annulla per t_1 = 0 s e per $t_2 = \frac{1}{3}$ s. La derivata seconda, cioè l'accelerazione, vale

$$a = 2 - 12\,t,$$

che è positiva per t = 0 s e negativa per $t_2 = \frac{1}{3}$ s. La massima distanza dall'origine si raggiunge in tale istante e vale

$$x_{\text{max}} = \frac{1}{27}\,\text{m} = 3{,}7\,\text{cm}.$$

b), c) Quando la velocità è massima, l'accelerazione è nulla e ciò accade per t = (1/6) s, quando la velocità vale

$$v_{\text{max}} = \frac{1}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 16{,}7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

d) Basta sostituire il valore t = (1/6) s nella legge oraria per trovare

$$x\,(v_{\text{max}}) = 9{,}2 \text{ mm}.$$

2.42. Un orologio perde 2 min al giorno rallentando uniformemente. Calcolare: a) l'accelerazione angolare della lancetta dei minuti, b) di quanto va indietro nelle prime 12 h.

(4)

---

a) In un giorno (24 h) la lancetta dei minuti compie 24 giri se l'orologio è esatto; nel nostro caso l'angolo descritto è

$$\Delta\theta = \left(23 + \frac{58}{60}\right) 2\pi \ \text{ rad}.$$

b) Dalla legge del moto circolare uniformemente decelerato

$$\Delta\theta = -\frac{1}{2}\gamma\, t^2 + \omega_o\, t$$

ricaviamo

$$\gamma = \frac{2(\omega_o t - \Delta\theta)}{t^2} \quad ,$$

$$\Delta\theta = -\frac{1}{2}\gamma\ (43200)^2 + \omega_o \cdot 43200 = 11{,}99166667 \text{ giri.}$$

La differenza è 0,00833 giri, pari a 30,0 s.