3 Dinamica del punto

(41 problemi, difficoltà 162, soglia 144)

Formulario

m, M	massa
$\boldsymbol{F}$	forza
k	costante elastica o rigidità di una molla
x	deformazione di una molla
μ_s	coefficiente di attrito statico
μ_d	coefficiente di attrito dinamico
N	componente normale delle forze
$F_s \leq \mu_s N$	forza di attrito statico
$F_d \leq \mu_d N$	forza di attrito dinamico
$\rho = \dfrac{dm}{dV}$	densità

Leggi di Newton

I. Principio d'inerzia: se $\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{v} = 0$ oppure $\boldsymbol{v}$ = costante
II. $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$
III. Principio di azione e reazione: $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$

Risultante di forze

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i$$

Forza peso

$$\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{g}$$

Legge di Hooke

$$F = -k\,x$$

Collegamento di molle

Rigidità equivalente di più molle in serie

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Rigidità equivalente di più molle in parallelo

$$k_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Pendolo semplice

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Condizioni di equilibrio

$$\boldsymbol{R} = 0$$

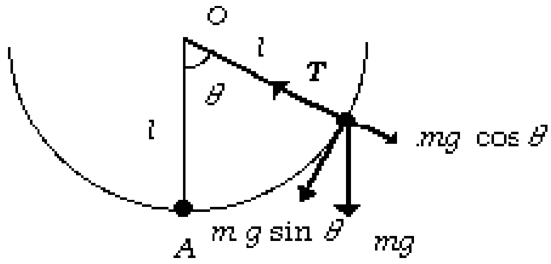
Unità di misura

Massa	kilogrammo (kg) grammo (g) $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$
Forza	newton (N) kilogrammo-forza (kgf) (*obsoleta*) 1 kgf = 9,8 N
Densità	kilogrammo al metro cubo (kg/m^3) grammo al centimetro cubo (g/cm^3) grammo al litro (g/l) $1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1\,\frac{\text{g}}{\text{l}}$

Problemi svolti

3.1. Un pendolo semplice con massa puntiforme e filo ideale oscilla in un piano verticale e A è la più bassa posizione raggiunta. Trascurando ogni attrito, dire: a) in quale posizione è minima l'accelerazione tangenziale, b) quando e dove la tensione uguaglia il peso, c) dove è nulla l'accelerazione del pendolo, d) dove è massima la tensione del filo, e) dove è massima la forza centripeta.

(4)



a) L'accelerazione tangenziale, come si vede in figura, è $g \sin\theta$ ed è minima quando $\theta = 0$, cioè nella posizione A.

b) La tensione nella generica posizione θ è data da

$$T - m\, g \cos\theta = \frac{m\, v^2}{l}\ ;$$

essa può uguagliare il peso solo se $v = 0$ e $\theta = 0$, ovvero quando la massa del pendolo è in quiete nella posizione A.

c) Mai: essa vale sempre g.

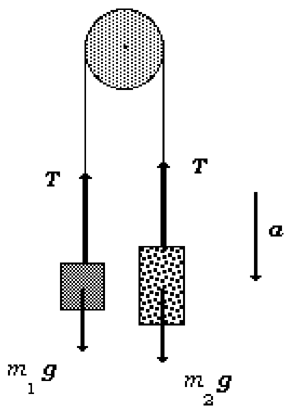
d) Abbiamo visto essere

$$T = \frac{m\, v^2}{l} + m\, g \cos\theta\, ;$$

essa è massima dove lo sono v e θ, ovvero in A.

e) La forza centripeta è massima dove è massima v, cioè in A.

3.2. Un astronauta, giunto sulla superficie di un pianeta, esegue un singolare esperimento per misurare l'accelerazione di gravità g su tale pianeta: appende a una carrucola mediante un filo ideale due sassi, uno di massa m_1 = 100 g e l'altro di massa m_2 = 130 g. Osserva che il sasso più pesante cade con accelerazione a = 0,2 m/s^2. Quanto vale g? **(3)**



Con riferimento alla figura, tenendo conto che sarà il sasso di destra a trascinare l'altro, le forze agenti sul sasso di destra sono il peso $m_2\boldsymbol{g}$ e la tensione $\boldsymbol{T}$ del filo, mentre sul sasso di sinistra agiranno il peso $m_1\boldsymbol{g}$ e la tensione, che è ancora $\boldsymbol{T}$ essendo il filo ideale. Pertanto scrivendo la seconda legge di Newton per i due sassi, abbiamo:

$$m_1\, g - T = -\, m_1\, a,$$

$$m_2\, g - T = m_2\, a.$$

Sottraendo la prima equazione alla seconda si ottiene

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1),$$

$$g = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\, a = \frac{0,2 \cdot 230}{30} = 1,53\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

3.3. Una mongolfiera di massa M = 200 kg e volume V = 260 m^3, ancorata al suolo, viene lasciata libera in aria di densità ρ_a= 1,3 kg/m^3. Giunta alla quota h = 200 m, da essa viene scaricata una zavorra di massa m = 30 kg. Calcolare: a) l'accelerazione della mongolfiera a pieno carico, b) la velocità a quota h, c) il tempo impiegato dalla zavorra a giungere al suolo, d) l'accelerazione della mongolfiera dopo aver scaricato la zavorra. **(4)**

———

a) Trascurando la resistenza dell'aria e tenendo conto della spinta di Archimede, si ha, dalla legge fondamentale della dinamica:

$$a = \frac{F_A - M\,g}{M} = \frac{\rho_a V\, g - M\, g}{M} = g\left(\frac{\rho_a V}{M} - 1\right) = 0,69\ g = 6,76\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Essendo nulla la velocità iniziale, sarà

$$v = \sqrt{2\, a\, h} = 52\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Scriviamo due delle tre leggi di Galileo sul moto dei gravi, tenendo conto che, al momento in cui viene scaricata, la zavorra è animata dalla velocità v verso l'alto e indicando con v_f la velocità con cui tocca terra:

$$v_f = \sqrt{v^2 + 2\, g\, h},$$

$$v_f = -\, v + g\, t,$$

$$t = \frac{v_f + v}{g} = \frac{\sqrt{v^2 + 2\, g\, h} + v}{g} = 13,6\ \text{s}.$$

d) La perdita di una massa m corrisponde a una diminuzione di peso della mongolfiera, cioè all'applicazione di una forza $m\,g$ verso l'alto, quindi per la legge fondamentale della dinamica, a un'accelerazione supplementare verso l'alto:

$$(M-m)\,a' = m\,g,$$

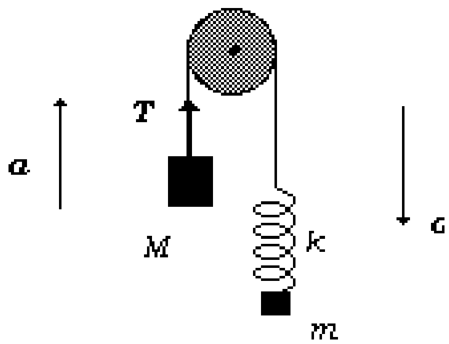
$$a' = \frac{m\,g}{M-m} = 1{,}73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

per cui la nuova accelerazione della mongolfiera sarà

$$a' + a = 8{,}49\ \mathrm{m/s^2}.$$

3.4. A una fune ideale appoggiata su una carrucola ideale sono appese da un lato una massa M = 200 g e dall'altro una molla ideale di costante elastica k = 98 N/m e una massa m = 500 g. Se si tira leggermente la massa m verso il basso e poi la si rilascia, il sistema oscilla di moto armonico. Calcolare: a) il periodo di oscillazione, b) la posizione del centro di oscillazione.

(5)



a) Scriviamo le equazioni di moto delle due masse, tenendo presente che la tensione della fune si identifica con la forza di richiamo esercitata dalla molla:

$$m)\; m\,g - k\,x = m\,a,$$

$$M)\; -k\,x + M\,g = -M\,a,$$

da cui, sommando membro a membro:

$$(m-M)\,a = (M+m)\,g - 2\,k\,x,$$

$$a = -\frac{2k}{m-M}\,x + g\left(\frac{m+M}{m-M}\right),$$

equazione differenziale di un moto armonico semplice di periodo

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m-M}{2k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}3}{196}} = 0{,}25\ \mathrm{s}.$$

b) Il centro di oscillazione ha accelerazione nulla, perciò dall'espressione di a si ricava

$$x_o = \frac{g(m + M)}{2k} = \frac{9,8 \cdot 0,7}{196} = 0,035 \text{ m} = 3,5 \text{ cm}.$$

3.5. Un blocco viene lanciato dall'origine dell'asse x con velocità iniziale v_o su una superficie orizzontale il cui coefficiente di attrito varia nel tempo con legge $\mu = k\,t$. Ricavare in funzione di k, v_o e g le espressioni del tempo di arresto e della distanza di arresto.

(4)

Sappiamo che la decelerazione dovuta all'attrito radente su piano orizzontale è data da $a = -\mu\, g$, quindi sarà

$$\frac{dv}{dt} = -k\,g\,t,$$
$$dv = -k\,t\,g\,dt,$$

e

$$v = -\frac{1}{2}k\,g\,t^2 + v_o, \tag{1}$$

da cui, integrando:

$$x = -\frac{1}{6}k\,g\,t^3 + v_o\,t, \tag{2}$$

essendo per ipotesi $x\,(t = 0) = 0$.
Il tempo di arresto si ricava ponendo $v = 0$ nella (1):

$$t_a = \sqrt{\frac{2v_o}{k\,g}}.$$

La distanza di arresto si ottiene sostituendo t_a nella (2):

$$x_a = \frac{2v_o}{3}\sqrt{\frac{2v_o}{k\,g}}.$$

3.6. Un'auto lanciata su strada orizzontale rettilinea con velocità v = 72 km/h viene frenata uniformemente con decelerazione $a = -\,4$ m/s^2; se il coefficiente di attrito tra le gomme e il fondo stradale è μ = 0,3, calcolare: a) il tempo di arresto, b) la distanza di arresto. **(3)**

---

a) Alla decelerazione dovuta all'azione dei freni va sommata quella dovuta agli attriti sull'asfalto, pari a $\mu\;g$, perciò, applicando la legge di Galileo sul moto uniformemente decelerato, sarà:

$$v_f = v - (a + \mu\, g)\; t,$$

ed essendo nulla la velocità finale,

$$t_a = \frac{v}{a + \mu\, g} = \frac{20}{4 + 2{,}94} = 2{,}88 \text{ s.}$$

b) La distanza di arresto si ricava dalla relazione

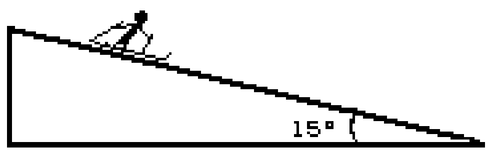
$$v_f^2 = v^2 - 2\,(a + \mu\, g)\, d,$$

che, con $v_f = 0$, fornisce

$$d = \frac{v^2}{2(a + \mu\, g)} = \frac{400}{2 \cdot 6{,}94} = 28{,}8 \text{ m.}$$

3.7. Una pista di discesa esposta al sole raddoppia il proprio coefficiente di attrito con gli sci in un tempo t_o= 8 h con un andamento lineare nel tempo partendo dal valore μ_o = 0,25. Supponendo una pista rettilinea con inclinazione α =15°, calcolare: a) la differenza tra la velocità finale di un discesista che parte quando il coefficiente di attrito vale μ_o dopo 2 min di discesa e quella di un altro discesista che percorre la stessa pista partendo 30 min dopo il primo (si suppongano identiche le prestazioni atletiche dei due sciatori); b) le velocità dei due sciatori dopo i 2 min.

(4)



———

a) Determiniamo innanzi tutto l'andamento del coefficiente di attrito in funzione del tempo. Scrivendo

$$\mu = \mu_o\,(1 + k\, t),$$

possiamo ricavare k sapendo che esso raddoppia dopo t = 8 h = 28800 s, ovvero

$$2\,\mu_o = \mu_o\,(1 + 28800\, k),$$

da cui

$$k = 3{,}4 \cdot 10^{-5}\, \mathrm{s}^{-1}.$$

Ricaviamo ora l'accelerazione dello sciatore, tenendo conto che a essa contribuiscono il peso, in misura $g \sin\alpha$, e l'attrito, in misura $-\,\mu\, g \cos\alpha$, ovvero

$a = g\,(\sin\,\alpha - \mu \cos\,\alpha) = g\,[\sin\,\alpha - \mu_o\,(1 + k\,t) \cos\,\alpha] = g\,(\sin\,\alpha - \mu_o \cos\,\alpha - \mu_o\,k\,t \cos\,\alpha)$.

Per ricavare la velocità in funzione del tempo, integriamo l'espressione di a nell'intervallo di tempo (t_1, t_2), ottenendo

$$v = g(\sin\alpha - \mu_o \cos\alpha)(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} k\,\mu_o\, g \cos\alpha (t_2^2 - t_1^2).$$

Per il primo sciatore t_1 = 0 s, t_2 = 120 s, mentre per il secondo t_1 = 1800 s, t_2 = 1920 s. Sarà allora

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2} k\,\mu_o\, g \cos\alpha \left[(1920^2 - 1800^2) - 120^2\right] = 17{,}43\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 62{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

b) Sarà

$$v_1 = 167{,}2 \text{ km/h},\ v_2 = 104{,}5 \text{ km/h}.$$

3.8. Un orologio a pendolo costruito e regolato a Milano, dove g = 9,807 m/s^2, viene venduto a un cliente de Il Cairo, dove g' = 9,796 m/s^2. Di quanto andrà avanti o indietro ogni giorno tale orologio?

(3)

Il periodo dell'orologio a Milano è

$$T_{\text{MI}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

mentre quello a Il Cairo sarà

$$T_{\text{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

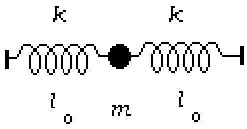
Dividendo membro a membro:

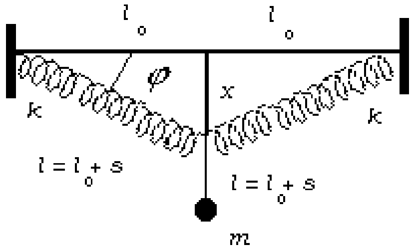
$$\frac{T_{\text{MI}}}{T_{\text{C}}} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = 0{,}99944.$$

Il periodo dell'orologio è maggiore a Il Cairo, quindi là l'orologio andrà indietro; essendovi in un giorno 86400 s, tale orologio a il Cairo rallenterà di 48 s.

3.9. Due identiche molle ideali sono collegate come in figura fissate al centro a una sferetta di massa m = 40 g e sostenute orizzontalmente da una mano. Se la sferetta viene abbandonata, dopo un certo numero di oscillazioni, si ferma a distanza x = 16 cm in posizione di equilibrio. Sapendo che l_o = 20 cm, a) calcolare la rigidità k delle molle, b) stabilire sotto quali condizioni il moto

della sferetta sarà armonico semplice e, assumendo lo stesso valore di k trovato nel caso a), calcolarne il periodo. **(6)**





a) In condizioni di equilibrio, il peso della sferetta deve uguagliare il risultante delle due forze di richiamo prodotte dall'allungamento delle molle di un tratto s; con riferimento alla figura e indicando con $l = l_o + s$ la nuova lunghezza di ciascuna molla, si ha:

$$m\,g = 2\,k\,s\sin\varphi,$$

dove

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_o^2}}.$$

Allora:

$$s\sin\varphi = x - l_o \sin\varphi = x\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + l_o^2}}\right),$$

perciò

$$m\,g = 2\,k\,x\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + l_o^2}}\right),$$

da cui

$$k = \frac{m\,g}{2\,x\left(1 - \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + l_o^2}}\right)} = 5,6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

b) Scriviamo la legge fondamentale della dinamica:

$$m\,g - 2\,k\,s\,\sin\varphi = m\,a\ ,$$

cioè, tenendo conto che la proiezione verticale y dell'allungamento di ogni molla è $y = s\,\sin\,\varphi$,

$$a = -\frac{2k}{m}\,s\,\sin\varphi + g = -\frac{2k\,y}{m} + \frac{2k\,l_o}{m\sqrt{1 + \frac{l_o^2}{y^2}}} + g\ ,$$

che coincide con l'equazione differenziale di un moto armonico semplice se

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l_o}{y}\right)^2+1}} \to 0,$$

ovvero se $y << l_o$.
Nel caso in esame, deve essere y << 20 cm e l'equazione di moto diventa

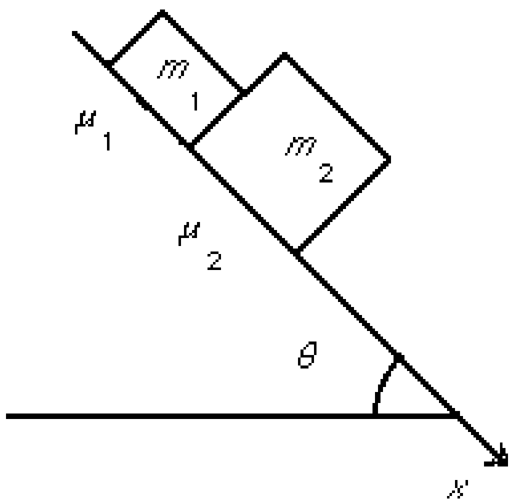
$$a = -\frac{2k}{m}y + g,$$

che rappresenta un moto armonico semplice di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}04}{11{,}2}} = 0{,}38 \text{ s.}$$

3.10. Su un piano inclinato di θ = 45° i due blocchi di massa m_1 = 2 kg ed m_2 = 3 kg sono soggetti ad attrito con rispettivi coefficienti μ_1 = 0,1 e μ_2 = 0,2. Calcolare: a) l'accelerazione a del sistema, b) la forza esercitata reciprocamente tra i blocchi. Se μ_1 = 0,4 e μ_2 = 0,2, calcolare: c) le accelerazioni dei due blocchi e d) a quale distanza si trovano dopo un tempo t = 3 s.

(4)



---

a) Scriviamo la seconda legge di Newton lungo l'asse x;

$$(m_1 + m_2)\, g \sin\theta - g \cos\,\theta\, (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) = (m_1 + m_2)\, a,$$

da cui

$$a = 5{,}8 \;\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\;.$$

b) Le due forze, per il terzo principio della dinamica sono uguali e opposte,perciò basta calcolarne solo una; per esempio, sul blocco 1 agisce la forza F esercitata dal blocco 2; la seconda legge di Newton fornisce

$$- F - \mu_1 m_1 \, g \cos\theta + m_1 \, g \sin\,\theta = m_1 \, a,$$

da cui

$$F = 0{,}84 \text{ N}.$$

c) Se il coefficiente di attrito del primo blocco è maggiore di quello del secondo, durante la discesa i blocchi si staccano e le loro diverse accelerazioni sono date da:

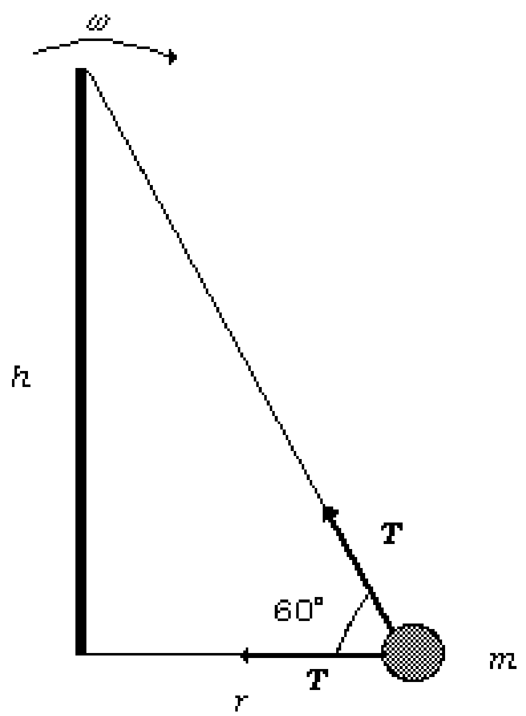
$$a_1 = g\,(\sin\,\theta - \mu_1 \cos\,\theta) = 4{,}15 \text{ m/s}^2;$$
$$a_2 = g\,(\sin\,\theta - \mu_2 \cos\,\theta) = 5{,}53 \text{ m/s}^2.$$

d) Essendo il moto dei blocchi uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, la loro distanza sarà

$$d = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)t^2 = 6{,}2 \text{ m}.$$

3.11. Un filo ideale recante inserita in posizione mobile una sferetta di massa $m = 20$ g è fissato agli estremi di una sottilissima asta di lunghezza $h = 82$ cm. Se il sistema viene messo in rotazione attorno all'asta, esso si pone in equilibrio rotatorio formando un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzontale. Calcolare: a) la tensione del filo, b) la sua lunghezza, c) la velocità angolare.

(3)



———

a) La sferetta è soggetta alle tensioni dei due tratti di filo, dirette verso gli estremi dell'asta, e al proprio peso; le condizioni di equilibrio sono:

in direzione verticale

$$T \sin 60° = m\, g, \tag{1}$$

in direzione orizzontale

$$T + T \cos 60° = m\, \omega^2\, r = m\, \omega^2\, h \tan 30°, \tag{2}$$

quindi, dalla (1):

$$T = \frac{m\, g}{\sin 60°} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8}{\sqrt{3}/2} = 0{,}23 \text{ N}.$$

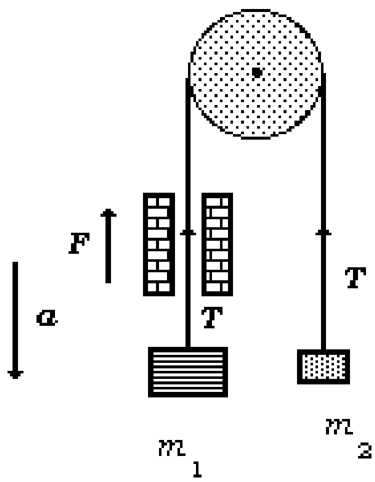
a) La lunghezza del filo vale:

$$l = r + \sqrt{h^2 + r^2} = \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\sin\alpha} = h\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = h\sqrt{3} = 1{,}42 \text{ m}.$$

c) Dalla (2):

$$\omega = \sqrt{\frac{T(1 + \cos 60°)}{m\, r}} = \sqrt{\frac{0{,}23 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}58}} = 6\, \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

3.12. Una fune ideale ai cui estremi sono fissate due masse m_1 = 1 kg ed m_2 = 600 g passa su una carrucola e durante il movimento subisce per attrito sulle pareti di una fenditura una forza F = 4 N. Calcolare l'accelerazione delle due masse. **(3)**



Supponendo che sia la massa m_1 a trascinare m_2, nonostante l'attrito nella fenditura, scriviamo separatamente la legge di Newton per le due masse:

m_1: $\quad m_1\, g - F - T = m_1\, a,$

m_2: $\quad -\, m_2\, g + T = m_2\, a.$

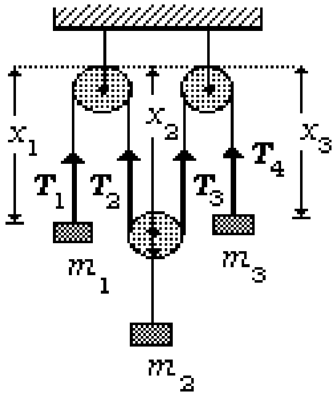
Sommando membro a membro, si ricava subito:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g - F}{m_1 + m_2} = \frac{0,4 \cdot 9,8 - 4}{1,6} = -0,05\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Il fatto che l'accelerazione risulti negativa indica che, essendo la forza di attrito maggiore della differenza dei due pesi, il sistema non potrà muoversi.

3.13. In figura le masse m_1, m_2 ed m_3 sono collegate tra loro mediante una fune ideale e le carrucole sono di massa trascurabile. Calcolare: a) le accelerazioni delle tre masse e le tensioni delle funi, b) le stesse quantità nel caso in cui le tre masse siano uguali.

(5)



---

a) Se le funi sono ideali e le carrucole prive di massa, le tensioni sono tutte uguali tra loro, quindi, indicando con T il valore comune e supponendo che sia la massa m_1 ad accelerare verso il basso con accelerazione a_1 e chiamate a_2 e a_3 le accelerazioni verso il basso delle altre due masse, scriviamo la legge di Newton per le tre masse ottenendo

$$m_1 g - T = m_1 a_1\,,$$
$$m_2 g - 2\,T = m_2 a_2\,,$$
$$m_3 g - T = m_3 a_3\,.$$

Nel sistema scritto sopra abbiamo 3 equazioni in 4 incognite ed è quindi necessario scrivere una quarta equazione: indicando con x_1, x_2 e x_3 le posizioni delle tre masse misurate a partire dalla linea orizzontale tratteggiata, con r il raggio delle tre carrucole e con l la lunghezza della fune, si ha

$$x_1 + 2\,x_2 + x_3 = l + 4\,r - 3\,\pi\,r.$$

Derivando due volte rispetto al tempo ambo i membri della precedente uguaglianza, ricaviamo la seguente relazione tra le accelerazioni delle tre masse:

$$a_1 + 2\,a_2 + a_3 = 0$$

Le soluzioni del sistema delle quattro equazioni, dopo qualche laborioso calcolo, sono:

$$a_1 = \frac{4m_1m_3 - 3m_2m_3 + m_1m_2}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}\,g,$$

$$a_2 = \frac{-4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}\,g,$$

$$a_2 = \frac{4m_1m_3 + m_2m_3 - 3m_1m_2}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}\,g,$$

$$T = \frac{4m_1m_2m_3}{4m_1m_3 + m_2m_3 + m_1m_2}\,g.$$

b) Nel caso in cui le tre masse abbiano il comune valore m, si ha:

$$a_1 = a_3 = \frac{g}{3},$$

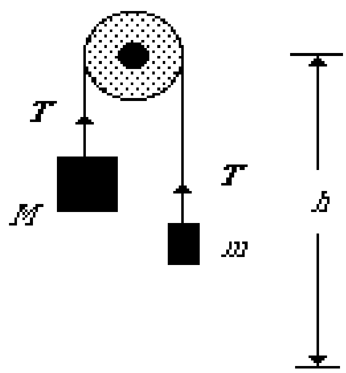
$$a_2 = -\frac{g}{3},$$

$$T = \frac{2}{3}\,m\,g.$$

Le due masse laterali scendono, mentre quella centrale sale con la stessa accelerazione.

3.14. Una massa m =1 kg e una M = 2 kg sono appese mediante una fune pesante di lunghezza l = 60 cm e densità lineare μ = 26 g/cm a una carrucola di massa trascurabile.
Ricavare, in condizioni di equilibrio, le espressioni: a) della distanza tra le due masse, b) della tensione della fune, c) la velocità con cui tocca terra la massa m se la fune si spezza, supponendo che il centro della carrucola si trovi a una quota h = 1,5 m dal suolo.

(5)



a) Detto x il tratto di cui pende di più la fune sulla destra della carrucola, l'equilibrio dei pesi impone che sia

$$m+\mu\left(\frac{l}{2}+x\right)=M+\mu\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

da cui

$$x=\frac{M-m}{2\mu}=0{,}19 \text{ m} .$$

La distanza tra le due masse sarà

$$d = 2\,x = 38 \text{ cm}.$$

b) Scrivendo le condizioni di equilibrio, otteniamo:

$$T-m\,g-\mu\left(\frac{l}{2}+x\right)g=0,$$

$$T=m\,g+\mu\,g\frac{l}{2}+\mu\frac{M-m}{2\mu}g=g\,(M+m+\mu\,l)=$$
$$= 9{,}8\ (3 + 2{,}6\cdot 0{,}6) = 44{,}7 \text{ N}.$$

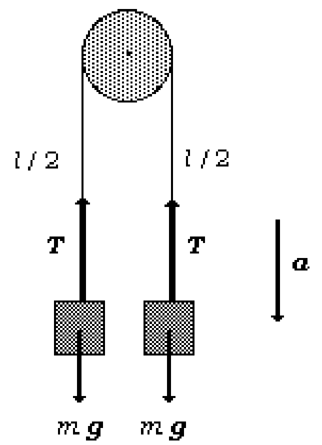
c) Basta applicare una delle leggi di Galileo, tenendo conto che se h è la quota del centro della carrucola, la distanza dal suolo di m è

$$d=h-\frac{l}{2}-x,$$

per cui :

$$v=\sqrt{2\,g\,d}=\sqrt{2\,g\,(h-\frac{l}{2}-x)}=\ 5{,}44\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$

3.15. Un sottile filo omogeneo inestensibile di densità lineare λ = 3 g/cm e lunghezza l = 1 m è in equilibrio a cavallo di un chiodo liscio infisso in una parete recando alle estremità due identiche masse m = 200 g. Dando un leggero strappo alla massa di destra, il filo scivola. Calcolare: a) l'accelerazione a del sistema in funzione dello spostamento x dalla posizione di equilibrio, b) l'accelerazione a' nell'istante in cui il sistema si stacca dal chiodo. **(4)**



a) Scriviamo separatamente per la parte destra e sinistra la legge fondamentale della dinamica, indicando con T la tensione del filo:

A destra:
$$m\,g - T + \mu\,g\left(\frac{l}{2} + x\right) = \left[m + \mu\left(\frac{l}{2} + x\right)\right]a,$$

a sinistra:
$$m\,g - T + \mu\,g\left(\frac{l}{2} - x\right) = -\left[m + \mu\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]a.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ottiene:

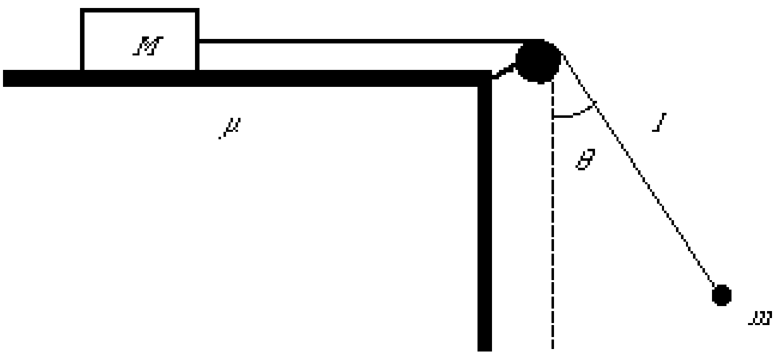
$$a = \frac{2x\,\mu\,g}{2m + \mu\,l} = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}8}{0{,}4 + 0{,}3}\,x = 8{,}4\,x.$$

b) Quando il sistema si stacca dal chiodo, è $x = l/2$, quindi

$$a' = \frac{l\mu\,g}{2m + \mu\,l} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

3.16. Una massa M = 1 kg è appoggiata su un piano orizzontale scabro con μ = 0,2 e, attraverso un filo ideale, è fissata a una massa m = 400 g tenuta in posizione angolare θ_0. Calcolare il minimo valore di θ_0 per cui, lasciando oscillare m, M non si sposta.

(4)



Se T è la tensione del filo, la legge di moto del blocco M è

$$T - \mu\,M\,g = M\,a;$$

per la massa m, si ha invece nella direzione del filo, essendo essa soggetta ad accelerazione centripeta:

$$-T + m g \cos\theta = -\frac{m v^2}{l} = m a,$$

da cui

$$a = g\frac{m\cos\theta - \mu M}{M + m}.$$

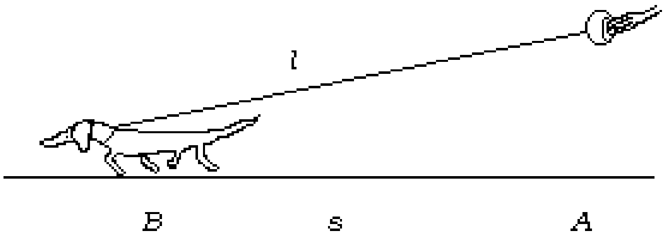
Il blocco non si sposta sul piano quando a = 0, ovvero quando

$$cos\theta_o = \frac{\mu M}{m} = \frac{1}{2},$$

cioè

$$\theta_o = 60\ °.$$

3.17. Un cane di massa m = 5 kg legato al guinzaglio e inizialmente fermo in A, scatta con accelerazione costante e raggiunge il punto B, a distanza s = 4 m da A, con velocità v = 36 km/h; in tale posizione il guinzaglio, di lunghezza l = 5 m, si tende. Calcolare la tensione. **(3)**



Se a è l'accelerazione del cane, deve essere

$$v^2 = 2\ a\ s = 2\ a\ l \cos\ \alpha,$$

da cui

$$a = \frac{v^2}{2\ l\cos\alpha}.$$

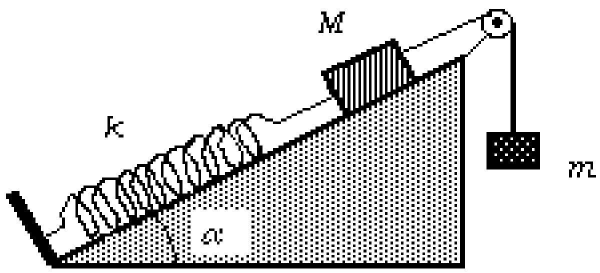
Se T è la tensione del guinzaglio, deve anche essere

$$T\cos\ \alpha = m\ a,$$

$$T = \frac{m\,a}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{2l\cos^2\alpha} = \frac{mv^2 l^2}{2l s^2} = \frac{mv^2 l}{2\,s^2} = \frac{5\cdot 100\cdot 5}{2\cdot 16} = 78{,}1\ \text{N}.$$

3.18. Una molla ideale di rigidità k = 20 N/m è fissata a una fune ideale collegata a un blocco di massa M = 400 g, mobile su un piano inclinato liscio e a una carrucola, recando all'estremo libero una massa m = 100 g. Il tutto è inizialmente in equilibrio con la molla allungata di un tratto s. Tirando leggermente m verso il basso e poi rilasciandola, il sistema oscilla di moto

armonico semplice. Calcolare: a) l'angolo α; b) l'allungamento della molla all'equilibrio, c) la tensione della fune all'equilibrio; d) il periodo di oscillazione. **(5)**



---

a) In condizioni di equilibrio deve essere

$$M\,g \sin \alpha = m\,g,$$

da cui

$$\sin \alpha = \frac{m}{M} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25,$$

$$\alpha = 14°29'.$$

b) La tensione del filo si identifica con la forza di richiamo della molla, perciò, scrivendo le condizioni di equilibrio per le due masse, si ha

$$m)\ T = k\,s = m\,g,$$
$$M)\ T = k\,s = M\,g \sin\alpha,$$

e quindi

$$s = \frac{m\,g}{k} = \frac{0,1 \cdot 9,8}{20} = 0,049 \text{ m} = 4,9 \text{ cm}.$$

c) $$T = m\,g = 0,98 \text{ N}.$$

d) Scriviamo la legge di Newton separatamente per le due masse, assumendo per la massa m un'accelerazione a orientata verso il basso:

per la massa m: $\quad -k\,x + m\,g = m\,a,$

per la massa M: $\quad -M\,g \sin\alpha - k\,x = M\,a,$

da cui, sommando membro a membro:

$$a = -\frac{2\,k}{M+m}\,x,$$

nella quale è immediato riconoscere l'equazione differenziale di un moto armonico semplice di periodo

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{2k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}5}{40}} = 0{,}7 \text{ s.}$$

3.19. Una molla ideale di rigidità k = 10 N/m reca appesa una sferetta di massa m = 100 g; la sferetta viene lasciata libera dalla posizione in cui la molla è scarica. Calcolare: a) l'ampiezza delle oscillazioni, b) il periodo delle oscillazioni, c) la legge oraria del moto. **(5)**

———

a) La molla, non appena lasciata libera, viene allungata dalla sferetta di un tratto

$$x_1 = \frac{2mg}{k},$$

e oscillerà attorno alla posizione di equilibrio nella quale l'allungamento della molla è

$$x_o = \frac{x_1}{2} = \frac{mg}{k},$$

pertanto l'ampiezza delle oscillazioni sarà

$$A = x_o = 9{,}8 \text{ cm.}$$

b) Il periodo di oscillazione sarà:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}1}{10}} = 0{,}63 \text{ s}.$$

c) Per ricavare la legge oraria del moto, scriviamo la x a meno di una costante di integrazione:

$$x(t) = A\ \sin(\omega\ t + \varphi) + C\ ,$$

e deriviamo rispetto al tempo per ricavare la velocità istantanea:

$$v(t) = A\ \omega\ \cos(\omega\ t + \varphi)\ .$$

Imponiamo poi che, per t = 0, x = 0 e v = 0:

$$0 = A\ \sin\varphi + C\ ,$$

$$0 = A\omega\ \cos\varphi\ ,$$

da cui:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ ,$$

$$C = - A\ .$$

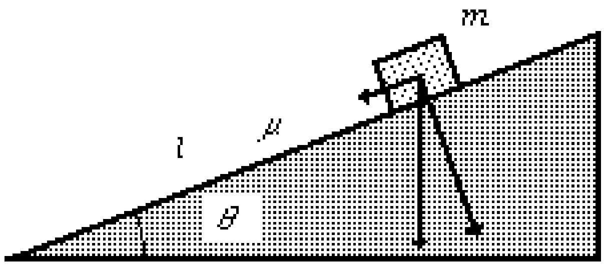
Risulta allora:

$$x = A \sin(\omega t + \pi/2) - A = A\,(1 - \cos \omega t)$$

e infine

$$x = 0{,}098\,(1 - \cos 10\, t)\ \text{m}.$$

3.20. Un blocco di massa m viene lasciato libero sulla cima di un piano inclinato di un angolo θ con coefficiente di attrito μ = 0,3 e lunghezza l =1 m. Stabilire se il moto del blocco può essere rettilineo uniforme e calcolare per quale valore minimo di θ il blocco può muoversi. **(4)**



Il blocco potrebbe muoversi di moto rettilineo uniforme quando la sua accelerazione è nulla, ovvero la sua velocità costante. Ciò accade quando la componente del peso lungo il piano uguaglia la forza di attrito, ovvero quando

$$m\,g \sin\theta = \mu\, m\, g \cos\theta,$$

ossia

$$\mu = \tan\theta.$$

Tuttavia, se l'accelerazione è nulla e il blocco era inizialmente fermo, esso, per il principio di inerzia, continuerà a restare in quiete.
La condizione ricavata sopra rappresenta il valore dell'angolo θ (16°42') da superare perché il blocco possa mettersi in moto: non appena tale valore viene superato, tuttavia il coefficiente di attrito diminuisce e il moto del blocco diventa uniformemente accelerato.

3.21. Una barca a motore si muove in linea retta con velocità v_0 = 6 m/s, quando viene spento il motore ed essa subisce una decelerazione di attrito a = $= -k\, v^2$, con k = 0,015 unità SI. Calcolare: a) la legge oraria della velocità, b) la legge oraria del moto, c) le dimensioni di k, d) dopo quanto tempo dallo spegnimento del motore la velocità della barca si è dimezzata, e) a quale distanza, f) il coefficiente di attrito con l'acqua in tale istante.

(5)

---

a) Sarà

$$a = -k v^2 = \frac{dv}{dt},$$

e quindi

$$-\frac{dv}{v^2} = k\,dt,$$

la cui integrazione fornisce

$$\frac{1}{v} = k\,t + \text{costante} = k\,t + \frac{1}{v_o},$$

e quindi

$$v(t) = \frac{v_o}{1 + k v_o\, t}.$$

b) Dalla legge oraria della velocità, si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_o}{1 + k v_o\, t},$$

$$dx = \frac{1}{k}\,\frac{d(k v_o\, t)}{1 + k v_o\, t},$$

che, per integrazione, ricordando che per $t = 0$ è $x = 0$, conduce alla legge oraria $x = \frac{1}{k}\ln(1 + k v_o\, t)$.

c)

$$[k] = \frac{[a]}{[v^2]} = \frac{[\mathrm{L\,T^{-2}}]}{[\mathrm{L^2\,T^{-2}}]} = [\mathrm{L^{-1}}]$$

d) Riprendendo la legge oraria della velocità e ponendo in essa $v = v_o/2$, ricaviamo

$$t_{1/2} = \frac{1}{k v_0} = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 6} = 11{,}1\ \text{s}.$$

e) Introducendo tale valore $t_{1/2}$ nella legge oraria, otteniamo

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}693}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} = 46{,}2\ \text{m}.$$

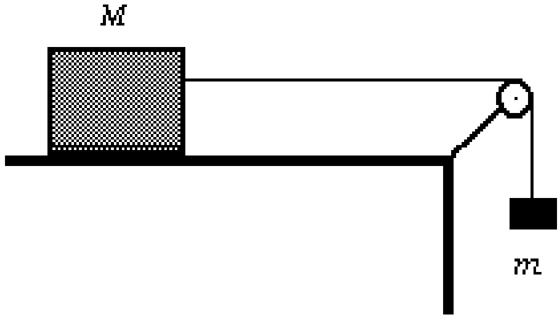
f) In un moto radente come quello della barca sull'acqua, la decelerazione di attrito si può scrivere come $-\mu\, g$, perciò

$$\mu = \frac{k v^2}{g} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{9{,}8} = 0{,}014.$$

N.B. In realtà per basse velocità come quella iniziale della barca, la dipendenza della resistenza offerta dall'acqua è espressa da una decelerazione del tipo $a = -k\,v$. Si suggerisce allo studente di trattare anche questo caso confrontando poi i risultati per rendersi conto delle differenze.

3.22. Un blocco di massa $M = 4$ kg in quiete su un piano orizzontale liscio viene trascinato da un secondo blocco di massa $m = 1$ kg appeso verticalmente mediante una carrucola collegata al primo da un filo ideale. Calcolare: a) l'accelerazione del sistema, b) la tensione del filo, c) la distanza percorsa sul piano dal blocco M dopo 3 s.

(3)



———

a) Scriviamo la legge fondamentale della dinamica separatamente per i due blocchi:

$$T = M\,a$$

$$m\,g - T = m\,a,$$

da cui, sommando membro a membro:

$$a = \frac{m}{m + M}\,g = \frac{1}{5}\cdot 9,8 = 1,96\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b)

$$T = M\,a = 7,84\ \mathrm{N}.$$

c)

$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1,96\cdot 9 = 8,82\ \mathrm{m}.$$

3.23. Un carico puntiforme appeso a una fune ideale, se posto in oscillazione con piccola ampiezza ha, in assenza di attriti, un periodo $T = 9$ s. Se la lunghezza della fune viene ridotta a 1/3 del valore iniziale, quale sarà il nuovo periodo di oscillazione? **(3)**

———

Indicando con l la lunghezza iniziale e con T' il nuovo periodo, dovrà essere

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}},$$

da cui

$$T' = \frac{T}{\sqrt{3}} = \frac{9}{1,73} = 5,2\ \mathrm{s}.$$

3.24. Se un oggetto pesa P = 0,196 N a 45°Lat, calcolare: a) la sua massa sulla Luna, b) il suo peso sulla Luna, c) il suo peso ai poli, d) la massa all'equatore, e) la massa ai poli.

(2)

Assumiamo come valore standard dell'accelerazione di gravità g = 9,8 m/s^2 a 45°Lat, all'equatore g_e = 9,78 m/s^2, mentre ai poli è g_p = 9,83 m/s^2. Inoltre l'accelerazione di gravità sulla Luna è g_l = 1,65 m/s^2.
La massa dell'oggetto è

$$m = \frac{P}{g_p} = \frac{0,196}{9,83} = 1,99 \cdot 10^{-2}\,\text{kg} = 19,9\ \text{g}.$$

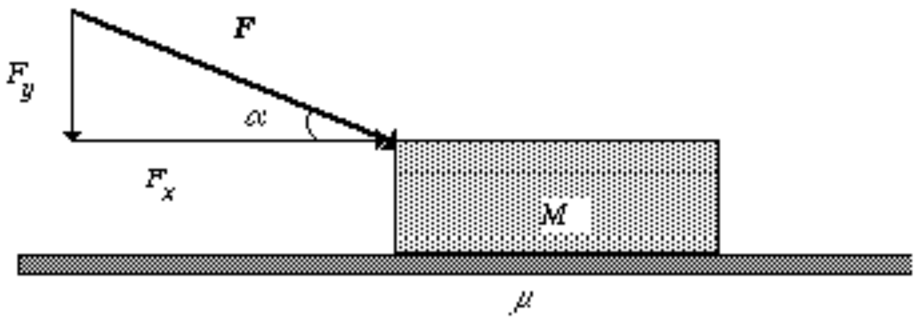
a), d), e) La massa è una caratteristica universale e manterrà lo stesso valore sia sulla Luna che all'equatore e ai poli.

b) Il peso sulla Luna vale $P_l = m\, g_l$ = 1,99 $\cdot 10^{-2} \cdot$ 1,65 = 33 mN.

c) Il peso ai poli vale P_p = 1,99 $\cdot 10^{-2} \cdot$ 9,83 = 0,1956 N.

3.25. Un blocco di massa M = 4 kg è in quiete su un piano scabro con coefficiente di attrito μ = 0,4; se lo si vuol porre in moto mediante una forza inclinata di α = 30° sull'orizzontale, calcolare: a) la minima forza da applicare, b) la minima forza orizzontale.

(3)



---

a) La forza ***F*** da applicare ha due componenti, quella orizzontale spinge il blocco, mentre quella verticale si somma al peso aumentando la forza di attrito; perché il blocco possa muoversi, la componente F_x deve vincere la forza di attrito, ovvero dovrà essere

$$F \cos\alpha > \mu\,(M\,g + F \sin\alpha),$$

da cui

$$F_{\min} = \frac{\mu\, M g}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} = \frac{0,4 \cdot 4 \cdot 9,8}{0,866 - 0,4 \cdot 0,5} = 25,5\ \text{N}.$$

b) Se la forza viene applicata orizzontalmente, la forza di attrito sarà minore e tale sarà anche la forza da applicare; ponendo α = 0 nell'espressione di F_{min}, otteniamo infatti

$$F_{min\ or} = \mu M g = 15{,}7 \text{ N}.$$

3.26. Una molla ideale di rigidità k viene tagliata in due pezzi lunghi uno il doppio dell'altro. Determinare la rigidità di ciascuno di essi in funzione di k.

(3)

Essendo la rigidità di una molla inversamente proporzionale alla lunghezza, indicando rispettivamente con k_1 e k_2 le rigidità dei due pezzi, abbiamo

$$k_1 = k_2/2.$$

Teniamo presente anche che, collegando i due pezzi in serie, dobbiamo ritrovare la rigidità iniziale k, perciò

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 \cdot 2k_1}{3k_1} = \frac{2}{3} k_1,$$

da cui

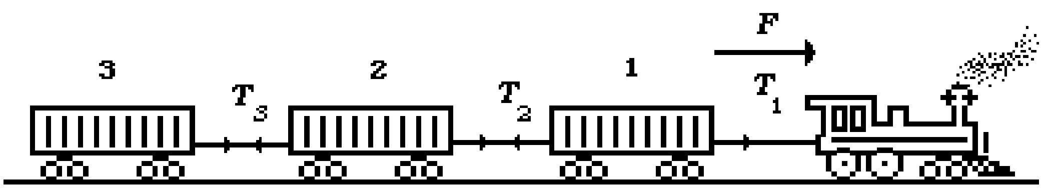
$$k_1 = \frac{3}{2} k$$

e

$$k_2 = 3k.$$

3.27. Una locomotiva traina 3 carri merci di ugual massa m = 4 t mediante una forza F = 40 kN. Essi sono collegati tra loro e alla locomotiva da tre identiche catene di massa trascurabile. Calcolare: a) l'accelerazione del sistema, b) le tensioni delle tre catene.

(3)



---

a) Applichiamo la seconda legge della dinamica al blocco dei tre carri:

$$F = 3\, m\, a,$$

da cui

$$a = \frac{F}{3m} = \frac{4 \cdot 10^4}{12 \cdot 10^3} = 3{,}33 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Applichiamo la stessa legge separatamente ai tre carri, indicando con T_1, T_2 e T_3 le tensioni delle tre catene; osserviamo, come appare chiaramente in figura, che: T_1 coincide con F; inoltre, applicando la seconda legge di Newton separatamente ai carri 2 e 3, ricaviamo:

$$T_3 = m\,a = m\frac{F}{3\,m} = \frac{F}{3} = 13{,}33 \text{ kN};$$
$$T_2 - T_3 = m\,a,$$
$$T_2 = T_3 + ma = \frac{2}{3}F = 26{,}67 \text{ kN}.$$

3.28. Una molla ideale di rigidità k = 1 N/m recante all'estremo libero una sferetta di massa m = 10 g e fissata all'altro estremo viene posta in oscillazione orizzontalmente senza attriti. Se le costanti iniziali del moto sono x_o= 8 mm e v_o= 20 cm/s, calcolare: a) il periodo di oscillazione, b) l'ampiezza del moto, c) la legge oraria. **(4)**

a) Il periodo di oscillazione è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{10^{-2}}{1}} = 0{,}63 \ s.$$

b), c) La legge oraria di un moto armonico quale quello del sistema massa–molla proposto è

$$x = A\cos(\omega\, t + \delta),$$

mentre la legge oraria della velocità è

$$v = -A\omega\sin(\omega\, t + \delta)$$

dove A è l'ampiezza delle oscillazioni. All'istante iniziale abbiamo

$$x_o = A\cos\delta,$$
$$v_o = -A\,\omega\sin\delta.$$

Risulta allora

$$\tan\delta = -\frac{v_o}{\omega\, x_o} = -\frac{20\cdot 10^{-2}}{10\cdot 8\cdot 10^{-3}} = -2{,}5,$$

da cui

$$\delta = -1{,}19 \text{ rad}.$$

Avremo allora

$$A = \frac{x_o}{\cos\delta} = \frac{8\cdot 10^{-3}}{0{,}37} = 2{,}16\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

e la legge oraria del moto sarà

$$x = 2{,}16\cdot 10^{-2}\cos(10\ t - 1{,}19) \text{ in unità SI.}$$

3.29. Calcolare il modulo R del risultante delle forze $F_1 = 70$ N ed $F_2 = 240$ N applicate allo stesso punto materiale nei casi: a) F_1 ed F_2 parallele ed equiverse, b) F_1 ed F_2 parallele ma di verso opposto, c) F_1 ed F_2 perpendicolari.

(2)

---

a) Se le forze sono parallele ed equiverse, il modulo del risultante sarà la somma dei moduli, cioè

$$R = 310 \text{ N.}$$

b) Se le forze hanno verso opposto, sarà invece

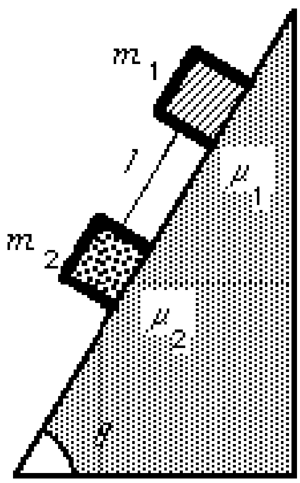
$$R = 170 \text{ N.}$$

c) Il modulo del risultante avrà la stessa lunghezza della diagonale del rettangolo avente le due forze come lati, ovvero

$$R = \sqrt{70^2 + 240^2} = 250 \text{ N.}$$

3.30. Due blocchi di ugual massa $m_1 = m_2 = 800$ g sono collegati da un filo ideale lungo $l = 40$ cm e tenuti fermi su un piano inclinato con $\theta = 60°$ con il quale i coefficienti di attrito sono $\mu_1 = 0{,}4$ e $\mu_2 = 0{,}2$. Una volta lasciati liberi il filo si tende. Calcolare: a) dopo quanto tempo il filo si tende, b) quale sarà l'accelerazione del sistema a filo teso, c) quale sarà la sua tensione.

(5)



---

a) I due blocchi si muovono inizialmente con accelerazioni differenti:

$$a_1 = g \sin\theta - \mu_1 \, g \cos\theta,$$

$$a_2 = g \sin\theta - \mu_2 \, g \cos\theta$$

e percorrono nel tempo t rispettivamente le distanze:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta)t^2,$$

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu_2 \cos\theta)t^2.$$

Il filo si tende quando $s_1 - s_2 = l$, ovvero

$$l = \frac{g}{2}(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta \ t^2,$$

da cui

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta}} = \sqrt{\frac{0,8}{9,8 \cdot 0,2 \cdot 0,866}} = 0,68 \ \text{s} .$$

b) Scrivendo la legge di Newton lungo il piano inclinato, l'accelerazione comune del sistema dei due blocchi risulta:

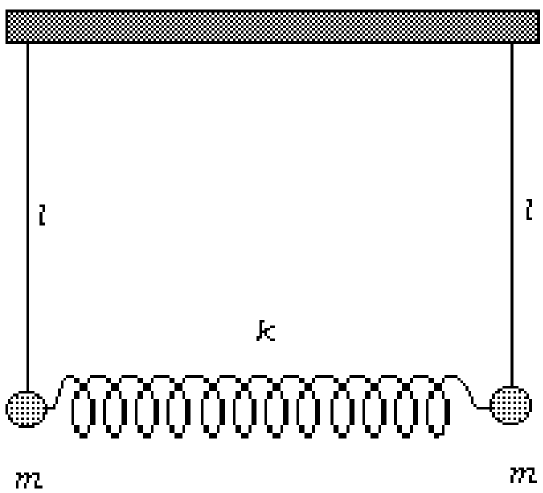
$$a = g\left[\sin\theta - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\cos\theta\right] = 2,35 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Scrivendo poi la legge di Newton per uno solo dei due blocchi, per esempio il primo e indicando con T la tensione del filo:

$$m\, g \sin\theta - m_1 g \cos\theta - T = m\, a,$$

$$T = \frac{m\, g \cos\theta}{2}(\mu_2 - \mu_1) = 0,68 \ \text{N}.$$

3.31. Due pendoli semplici di lunghezza l sono collegati in corrispondenza delle sferette terminali da una molla ideale scarica di rigidità k. Se le due sferette, entrambe di massa m, vengono spostate lievemente la prima a sinistra e la seconda a destra, e poi rilasciate, ricavare l'espressione del periodo delle piccole oscillazioni. **(5)**



Quando spostiamo le sferette, la molla si allunga da entrambi gli estremi di un tratto Δs; e la forza orizzontale di richiamo risultante vale

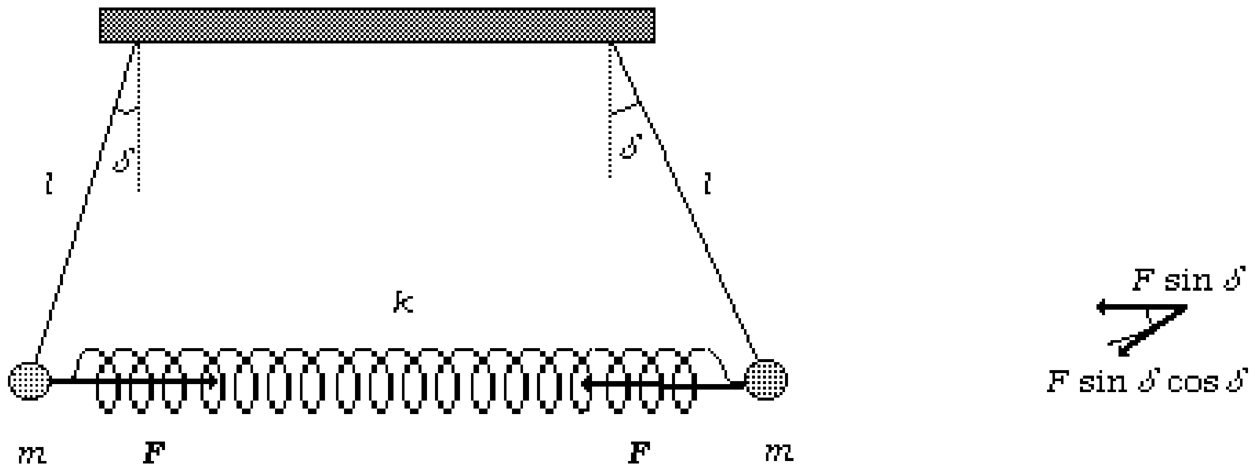
$$F = 2\ k\ \Delta s = 2\ k\ l \sin\delta.$$

La legge di moto di una sferetta proiettata sulla tangente alla circonferenza descritta durante l'oscillazione, tenendo conto che su essa agiscono tanto il peso quanto la forza di richiamo della molla allungata che in tale direzione vale

$$F \cos\delta = 2\ k\ l \sin\delta \cos\ \delta,$$

è

$$-\, m\, g \sin\ \delta - 2\ k\ l \sin\delta \cos\ \delta = m\, a,$$



da cui, per piccole oscillazioni ($\cos\ \delta = 1$, $\sin\ \delta = \delta$):

$$a = -\,(g + \frac{2\,k\,l}{m})\ \delta,$$

o anche, indicando con γ l' accelerazione angolare:

$$\gamma\ l = -\,(g + \frac{2\,k\,l}{m})\ \delta,$$

$$\gamma = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2\,k}{m}\right)\delta,$$

che è l'equazione differenziale di un moto armonico semplice di periodo

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{2\,k\,l}{m}}}.$$

3.32. Un blocco viene lanciato dall'origine dell'asse x con velocità iniziale v_o su una pista scabra il cui coefficiente di attrito cresce con la distanza con legge

$$\mu = \mu_o + k\,x^2,$$

dove $\mu_o = 0{,}2$ e $k = 0{,}01$ unità SI. Se il blocco si ferma a distanza $d = 12$ m dall'origine, calcolare la velocità iniziale. (**5**)

È

$$a = \frac{dv}{dt} = -\mu g = -\mu_o g - k x^2 g,$$

$$dv = -(\mu_o g + k x^2 g)dt,$$

$$dv = -(\mu_o g + k x^2 g)\frac{dx}{v},$$

$$v\,dv = -(\mu_o g + k x^2 g)\,dx,$$

da cui, integrando:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{3}kgx^3 - \mu_0 g\,x + \text{costante}.$$

Per determinare la costante, teniamo presente che nell'origine ha velocità v_o, perciò

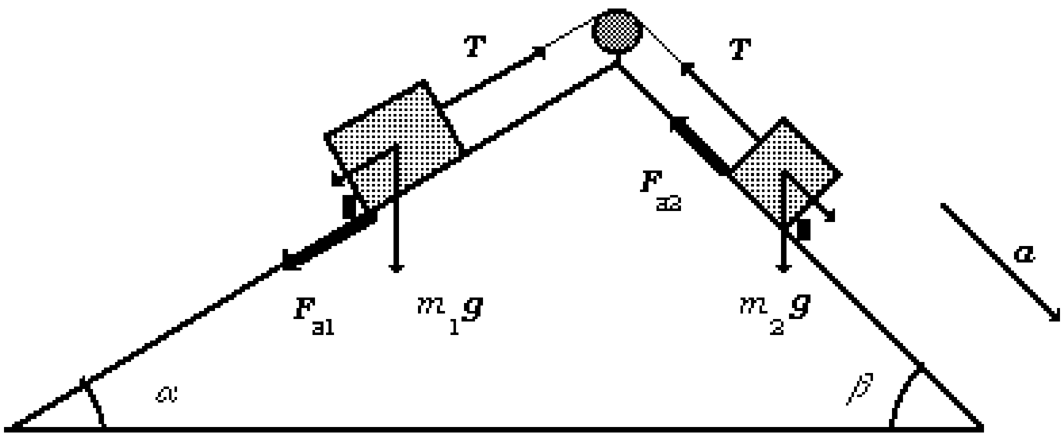
$$\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{3}k\,g\,x^3 - \mu_0\,g\,x + \frac{v_0^2}{2}.$$

Quando il blocco si ferma è $v = 0$, perciò

$$v_0 = \sqrt{2g\,d(\frac{k}{3}d^2 + \mu_0)} = \sqrt{19,6 \cdot 12\left(\frac{10^{-2}\cdot 144}{3} + 0,2\right)} = 12,6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

3.33. Due blocchi di masse m_1 ed m_2 collegati da un filo ideale che passa su una carrucola liscia di massa trascurabile sono tenuti in quiete da due fermi su due piani inclinati scabri con coefficienti di attrito μ_1 e μ_2 e angoli di inclinazione α e β. Studiare il moto del sistema allorché si tolgono i fermi.

(5)



———

Il problema proposto, apparentemente semplice, è molto complesso, in particolare se vengono dati i valori numerici delle grandezze.
A priori non siamo in grado di stabilire, ammesso che il sistema, tolti i fermi, possa muoversi, da che parte si muove, quindi dobbiamo ipotizzare a caso l'eventuale verso di moto. In figura abbiamo optato per il trascinamento del blocco 1 da parte del blocco 2. Le forze agenti sono le componenti del peso lungo i piani, la tensione del filo e le forza di attrito.

Scriviamo le due leggi del moto separatamente per i due blocchi:

1) $$T - m_1\, g \sin\alpha - \mu_1 m_1\, g \cos\alpha = m_1\, a,$$

2) $$-T + m_2\, g \sin\beta - \mu_2 m_2\, g \cos\beta = m_2\, a.$$

Ricaviamo l'espressione di a:

$$a = \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha - \mu_1 m_1 \cos\beta - \mu_2 m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}\, g.$$

Se risulta $a > 0$, il verso da noi ipotizzato è quello corretto e il problema è finito; ma se invece risulta $a < 0$, le cose si complicano perché non possiamo limitarci ad affermare che il sistema si muoverà in verso opposto con la stessa accelerazione a, ma dobbiamo riscrivere le due leggi del moto che, chiamando a' la nuova accelerazione, saranno

1) $$-T + m_1\, g \sin\alpha - \mu_1 m_1\, g \cos\alpha = m_1\, a',$$

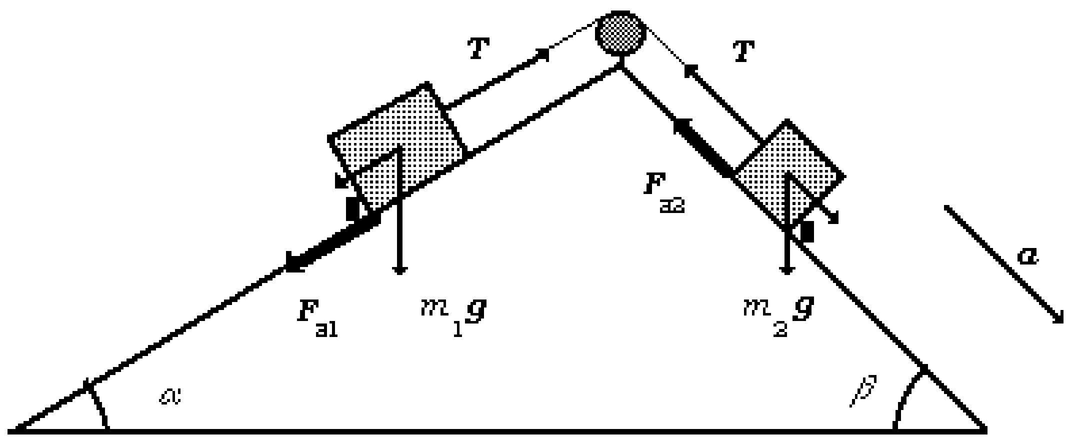
2) $$T - m_2\, g \sin\beta + \mu_2 m_2\, g \cos\beta = m_2\, a'.$$

dalle quali si ricava, sommando membro a membro:

$$a' = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta - \mu_1 m_1 \cos\beta - \mu_2 m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}\, g.$$

Come avevamo anticipato, si può notare che a e a' non hanno lo stesso valore assoluto. Anche qui, se $a' > 0$, il problema è finito, ma potrebbe capitare che anche a' risulti negativo, che indica che il sistema non si muove neppure dall'altra parte. Il risultato si spiega facilmente: se le componenti dei pesi sono minori delle forze di attrito nessuno dei due blocchi può trascinare l'altro.

3.34. Due blocchi di masse m_1 = 2 kg ed m_2 = 4 kg, collegati da un filo ideale che passa su una carrucola liscia di massa trascurabile sono tenuti in quiete da due fermi su due piani inclinati scabri con coefficienti di attrito μ_1= 0,1 e μ_2 = 0,5 angoli di inclinazione α = 40° e β=45°. Studiare il moto del sistema allorché si tolgono i fermi. **(4)**



Con riferimento al Problema **3.33**, abbiamo

$$a = \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha - \mu_1 m_1 \cos\beta - \mu_2 m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g =$$

$$= \frac{4 \cdot 0,707 - 2 \cdot 0,643 - 0,1 \cdot 2 \cdot 0,707 - 0,5 \cdot 4 \cdot 0,766}{6} =$$

$$= \frac{2,83 - 1,29 - 0,14 - 1,53}{6} = -0,02 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Essendo l'accelerazione negativa, è probabile che sia il blocco 1 a trascinare il 2, quindi calcoliamo – sempre con riferimento al Problema **3.33** – l'accelerazione a':

$$a' = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta - \mu_1 m_1 \cos\beta - \mu_2 m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g =$$

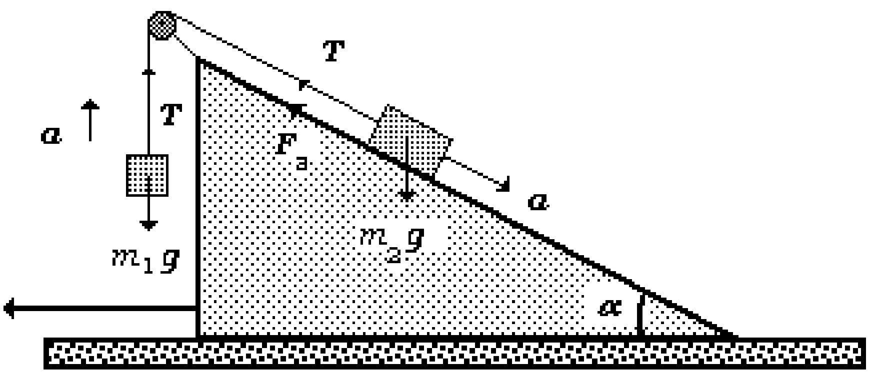
$$= \frac{2 \cdot 0,643 - 4 \cdot 0,707 - 0,1 \cdot 2 \cdot 0,707 - 0.5 \cdot 4 \cdot 0,766}{6} =$$

$$= \frac{1,29 - 2,83 - 0,14 - 1,53}{6} = -0,54 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

I blocchi non si possono muovere. Lasciamo allo studente il compito di calcolare la tensione del filo: qual è il significato fisico di una eventuale tensione negativa?

3.35. Un cuneo con angolo di base α si può muovere senza attrito su un piano orizzontale. Determinare a quali condizioni deve soddisfare il rapporto m_1/m_2 tra le due masse in figura, perché il cuneo: a) si muova verso sinistra, b) si muova verso destra, c) resti in quiete.

(5)



---

a) Il cuneo, per la conservazione della quantità di moto, si muove verso sinistra quando il blocco m_2 trascina m_1; con riferimento alla figura, scrivendo la legge fondamentale della dinamica separatamente per i due blocchi, abbiamo:

$$T - m_1 g = m_1 a,$$
$$-T - \mu\, m_2 g \cos\alpha + m_2 g \sin\alpha = m_2 a,$$

da cui, sommando membro a membro,

$$a = \frac{m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Perché il blocco m_2 trascini m_1, deve essere $a > 0$, cioè

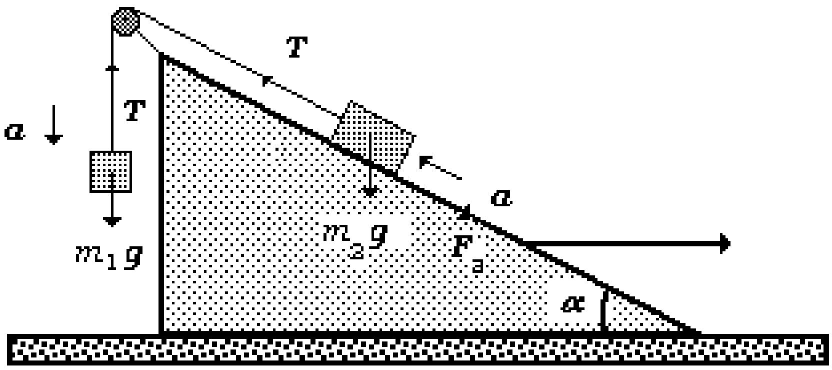
$$\frac{m_1}{m_2} < \sin\alpha - \mu\cos\alpha.$$

b) Il cuneo potrà muoversi verso destra se sarà il blocco m_1 a trascinare m_2; con riferimento alla figura, riscrivendo la legge di Newton, abbiamo:

$$-\ T + m_1 g = m_1 a,$$
$$T - \mu\ m_2 g \cos\alpha - m_2 g \sin\alpha = m_2 a,$$

da cui

$$a = \frac{m_1 - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} g.$$



Questa volta sarà $a > 0$ quando

$$\frac{m_1}{m_2} > \sin\alpha + \mu\cos\alpha.$$

c) Il cuneo non potrà muoversi quando

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha < \frac{m_1}{m_2} < \sin\alpha + \mu\cos\alpha.$$

3.36. Un blocco viene lanciato con velocità iniziale v_0 = 7 m/s su una pista scabra il cui coefficiente di attrito varia con la distanza con legge

$$\mu = 0{,}1 + 0{,}2\, x.$$

Calcolare: a) il tempo di arresto, b) la distanza di arresto.

(5)

---

a) Dalla legge di Newton proiettata nella direzione di moto, abbiamo

$$m\,a = -\,\mu\, m\, g = -\,m\, g\,(0{,}1 + 0{,}2\, x)$$

e quindi

$$a = -\,0{,}2\; g\, x - 0{,}1\; g,$$

equazione differenziale che ha per soluzione

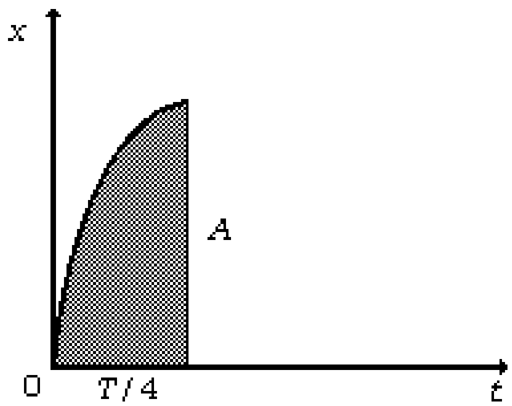
$$x = A \sin \omega\, t - 0{,}5,$$

con

$$\omega = \sqrt{0{,}2\, g} = 1{,}4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Si tratta quindi apparentemente di un moto armonico: tuttavia il blocco, una volta arrivato alla massima distanza dall'origine, si arresta, non essendo più soggetto alla forza di attrito, pertanto non torna indietro e non si può allora parlare di moto armonico.
Nella figura sottostante è rappresentato il grafico orario del moto, che dura solo per un quarto di periodo, fino al punto di arresto. Il tempo di arresto è dato da

$$t_{\text{arr}} = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{0{,}2\, g}} = 1{,}12 \text{ s}.$$



b) Derivando la legge oraria rispetto al tempo ricaviamo la velocità

$$v = A\,\omega \cos \omega\, t,$$

ma

$$A\,\omega = v_o,$$

quindi

$$A = \frac{v_o}{\omega} = \frac{v_o}{\sqrt{0{,}2\,g}} = 5\,\mathrm{m}.$$

3.37. Uno sciatore di massa m = 80 kg scende lungo un pendio inclinato di α = 30° il cui coefficiente di attrito vale μ = 0,1, mentre la resistenza offerta dall'aria è del tipo $F = -\,k\,v$, con k costante. Sapendo che la massima velocità che lo sciatore può raggiungere è v = 80 km/h, calcolare: a) il valore di k, le unità SI e le dimensioni; b) a quale distanza dalla partenza verrà raggiunta la massima velocità.

(4)

a) La legge di moto è

$$m\,a = m\,g\,\sin\,\alpha - k\,v - \mu\,m\,g\,\cos\alpha,$$

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - k\,v,$$

$$\int \frac{dv}{m\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - kv} = \int \frac{1}{m}\,dt,$$

$$-\frac{1}{k}\ln\left[m\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - k\,v\right] = \frac{t}{m} + \text{costante},$$

Essendo lo sciatore in quiete per t = 0, avremo dunque

$$m\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - k\,v = A\,\mathrm{e}^{-\frac{k\,t}{m}}.$$

$$A = m\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$v = \frac{mg}{k}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k\,t}{m}}).$$

La velocità massima si ha per a = 0, pertanto, dall'equazione di moto

$$k = \frac{m\;g(\sin\alpha\;-\;\mu\;\cos\alpha)}{v} = \frac{80\cdot 9{,}8\cdot(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}866)}{(80\;/\;3{,}6)} = 14{,}6\;\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\,.$$

Le dimensioni di k sono

$$[k] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{\left[\mathrm{M\,L\,T^{-2}}\right]}{\left[\mathrm{L\,T^{-1}}\right]} = \left[\mathrm{M\,T^{-1}}\right]$$

b) Dall'espressione di v, si può notare che la velocità massima si ha per t tendente all'infinito e vale

$$v = \frac{mg}{k}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

La distanza richiesta sarà quindi anch'essa infinitamente grande, come del resto è facile provare integrando l'espressione di v e ricavando la legge oraria del moto:

$$x(t) = \frac{m\,g}{k}(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)\left[t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)\right].$$

3.38. Un blocco viene lanciato dall'origine dell'asse x con velocità iniziale v_o su una pista orizzontale scabra il cui coefficiente di attrito varia linearmente col tempo con legge $\mu = k\,t$, dove k è una costante. Ricavare, in funzione di k, v_o e g le espressioni a) del tempo di arresto, b) della distanza di arresto. Quale potrebbe essere una situazione fisica reale in cui ciò accade?

(4)

---

a) Scriviamo la seconda legge di Newton:

$$m\,a = -\mu\,m\,g = -k\,m\,g\,t,$$

$$a = -k\,g\,t,$$

$$v = -k\,g\frac{t^2}{2} + v_o,$$

$$x = -\frac{1}{6}k\,g\,t^3 + v_o\,t.$$

Il tempo di arresto si ricava ponendo $v = 0$:

$$t = \sqrt{\frac{2v_o}{k\,g}}.$$

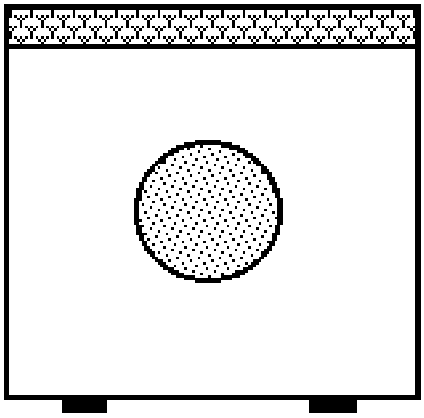
b) La distanza di arresto si ottiene sostituendo tale valore nell'espressione di x:

$$x_{arr} = \frac{2}{3}v_o\sqrt{\frac{2v_o}{k\,g}}.$$

Una situazione del genere potrebbe verificarsi durante una gara di sci quando, dopo lunga esposizione della pista al sole, la neve fonde facendo aumentare il coefficiente di attrito.

3.39. Una lavatrice appoggiata su quattro piedini di caucciù li comprime ciascuno di s = 1 mm. Calcolare la frequenza propria del sistema lavatrice-piedini, assimilandolo a un sistema massa-molla. Dire inoltre quale sarebbe in assenza di attriti l'ampiezza delle oscillazioni se il motore della lavatrice ruotasse a 946 giri/min.

(4)



———

La frequenza propria del sistema è espressa dalla relazione

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

dove m è la massa della lavatrice e k la rigidità equivalente del gruppo dei 4 piedini; se indichiamo con k_o la rigidità di ciascun piedino, i 4 piedini si comportano come 4 molle in parallelo, pertanto la rigidità complessiva diventa 4 k_o. Inoltre, ogni piedino viene compresso da un peso $mg/4$, quindi, applicando la legge di Hooke, abbiamo

$$\frac{1}{4}mg = k_o s,$$

e

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{s}} = \frac{1}{6,28}\sqrt{\frac{9,8}{10^{-3}}} = 15,8 \text{ Hz}.$$

Se il motore ruota a 946 giri/min, la sua frequenza di rotazione risulta

$$\nu' = 946/60 = 15,8 \text{ Hz}$$

e coincide esattamente con la frequenza propria della lavatrice; l'ampiezza delle oscillazioni, in assenza di attriti, diventerebbe infinitamente grande.
Per sistemi vibranti montati su supporti si deve fare in modo che la frequenza del sistema sia molto diversa da quella del motore che lo alimenta.

N.B. Osservando l'espressione della frequenza si è tentati di concludere che essa non dipende dal numero n di piedini. In realtà, deve essere, in condizioni

di equilibrio, $mg/n = k_o s$, e quindi la compressione s di ogni piedino, a parità di peso della lavatrice e di rigidità, è inversamente proporzionale al numero dei piedini.

3.40. Due persone, una di massa m = 80 kg, l'altra di massa M = 100 kg sono ferme appoggiate una all'altra di schiena su pattini a rotelle. Se la più leggera esercita una spinta orizzontale F = 300 N sulla più pesante, calcolare, trascurando il coefficiente di attrito con la pista: a) l'accelerazione di rinculo di m, b) la velocità di m dopo t_1 = 5 s dalla spinta, c) lo spostamento di M nello stesso istante, d) l'accelerazione di M. **(3)**

---

a) Si tratta di applicare la seconda e la terza legge della dinamica: m applica una forza $\boldsymbol{F}$ ad M e questo reagisce con una forza $-\boldsymbol{F}$, perciò m rincula con accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = \frac{300}{80} = 3{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Il moto di m sarà uniformemente accelerato, quindi

$$a' = \frac{F}{M} = \frac{300}{100} = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

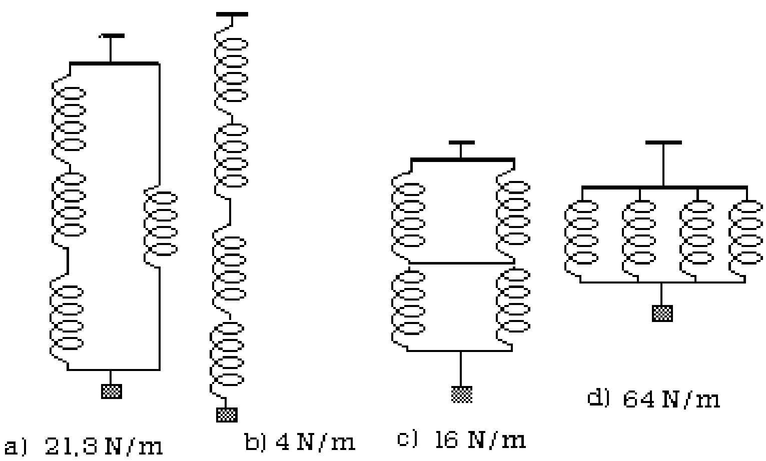
perciò

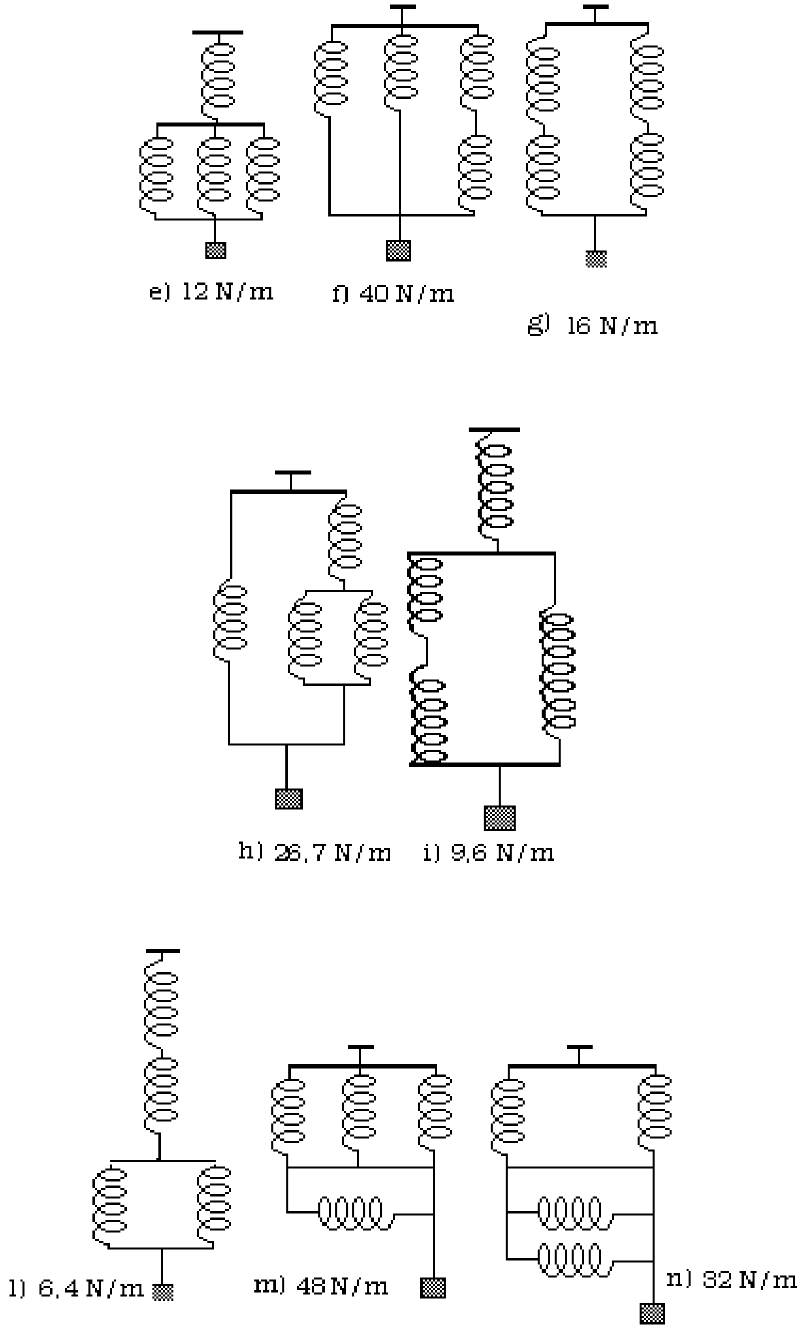
$$v = a\,t_1 = 3{,}8 \cdot 5 = 19\ \text{m/s}.$$

c), d) M si muove con accelerazione

$$s = \frac{1}{2}a'\,t_1^2 = 1{,}5 \cdot 25 = 37{,}5\ \text{m}.$$

3.41. Date 4 molle ideali identiche ciascuna di rigidità k = 16 N/m, calcolare il numero dei possibili collegamenti che si possono eseguire e le corrispondenti rigidità equivalenti. **(4)**





I possibili collegamenti sono 12, come in figura, nella quale sono anche indicate le rigidità equivalenti.