4 Lavoro ed Energia

(62 problemi, difficoltà 221, soglia 155)

Formulario

Lavoro di una forza variabile

$$L = \int_l \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{s} = \int_l F\, ds \cos\theta$$

con θ angolo tra la forza $\boldsymbol{F}$ e lo spostamento infinitesimo $d\boldsymbol{s}$ del suo punto di applicazione. L'integrale deve essere calcolato lungo la linea l sulla quale si sposta il punto di applicazione della forza perché in generale il lavoro non è una funzione di stato.

Lavoro di una forza costante

$$L = F\, \Delta s\, cos\theta$$

Lavoro elementare

$$\delta L = \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{s} = F\, ds \cos\theta$$

Tale lavoro è detto motore quando è positivo ($0 \le \theta < \pi/2$), resistente quando è negativo ($\pi/2 < \theta \le 3\pi/2$).
Una forza perpendicolare allo spostamento non compie lavoro.

Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Teorema dell'energia cinetica

$$L = \Delta K = K_f - K_i$$

Forze conservative

Una forza è detta **conservativa** o **posizionale** quando il lavoro da essa compiuto non dipende dal percorso ma solo dalla posizione iniziale e finale del punto di applicazione. Tale forza ammette una grandezza scalare funzione di stato detta **energia potenziale** *U* tale che sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Per verificare se una forza è conservativa, devono essere soddisfatte le seguenti **condizioni di Schwartz**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

Teorema dell'energia potenziale

$$L = -\,\Delta U$$

Energia potenziale elastica

$$U = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Energia potenziale di gravità (con *g* costante)

$$U = m\,g\,h$$

Principio di conservazione dell'energia meccanica

$$E = K + U = \text{costante}$$

$$\Delta E = 0$$

Nel caso di forze dissipative, tale teorema, indicando con L_D il lavoro di tali forze, diventa

$$L_D = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

Potenza

media $\qquad W_m = \dfrac{L}{\Delta t}$

istantanea $\qquad W = \dfrac{\delta L}{dt} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}$

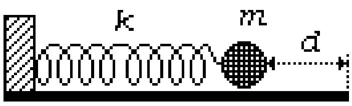
Unità di misura

lavoro,energia	joule (J) kilowattora (kWh) 1 kWh = 3,6 MJ
potenza	watt (W)

Problemi svolti

4.1. Una molla ideale di costante elastica k = 10 N/m è in quiete su un piano orizzontale liscio: un estremo è fissato a una parete, mentre all'altro è fissata una massa m = 10 kg. Se la massa viene tirata verso destra di un tratto d = 10 cm, e poi lasciata libera, calcolare: a) l'energia meccanica totale del sistema, b) la velocità con cui la massa ripassa dalla posizione iniziale, c) dopo quanto tempo la massa ripassa da tale posizione.

(3)



———

a) L'energia meccanica totale di un oscillatore armonico è data da $k\,A^2/2$, dove A è l'ampiezza di oscillazione, corrispondente alla deformazione d della molla, perciò

$$E = \frac{1}{2}\,k\,d^2 = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{J} = 50\ \text{mJ}.$$

b) Quando la massa m ripassa dalla posizione iniziale di quiete, l'energia potenziale della molla è diventata solo cinetica perché in tale posizione la molla non è deformata, quindi

$$\frac{1}{2} m v^2 = 5 \cdot 10^{-2},$$

$$v = \sqrt{\frac{10^{-1}}{10}} = 10 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

c) Il tempo impiegato a tornare nella posizione di quiete è pari a un quarto di periodo, ovvero

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,6 \text{ s}.$$

4.2. Un punto materiale di massa m = 20 g, inizialmente in quiete nell'origine dell'asse x, si muove sotto l'azione di una forza $F = -k\, x^3$, dove k è una costante. Se la velocità iniziale del punto è v_0 = 10 m/s e il moto si inverte a distanza d = 2 m dall'origine, calcolare la costante k.

(3)

La forza cui è soggetto il punto è conservativa, come è facile verificare applicando le condizioni di Schwartz e l'energia potenziale che compete al punto è

$$U = -\int F\, dx = \int k\, x^3 dx = \frac{1}{4}\, k\, x^4.$$

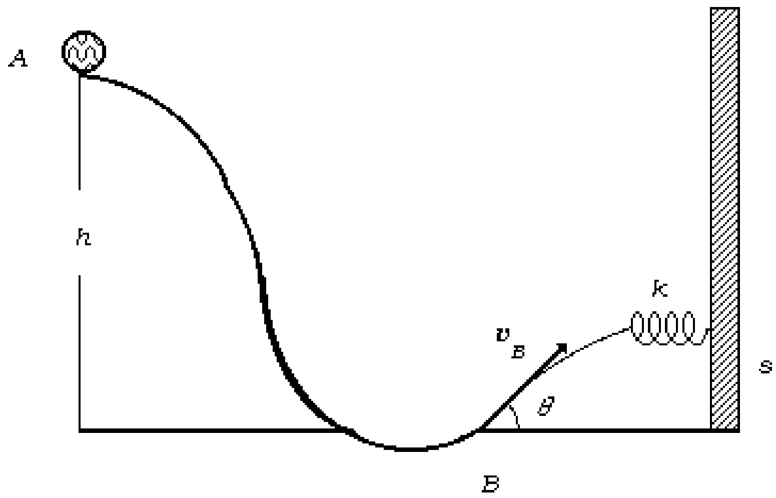
Trascurando ogni attrito e applicando il principio di conservazione dell'energia nell'origine (dove l'energia potenziale è nulla) e nel punto di inversione (dove è nulla l'energia cinetica), abbiamo

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{4} k\, d^4,$$

e quindi

$$k = \frac{2\, m\, v_0^2}{d^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2}{16} = 0,25 \ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

4.3. Una sferetta puntiforme di massa m = 1 g scivola lungo un profilo liscio partendo da ferma dalla quota h = 2 m e lo abbandona andando a colpire al culmine della traiettoria una molla ideale scarica di rigidità k = 49 N/m disposta orizzontalmente e comprimendola di un tratto d = 2 cm. Calcolare: a) l'angolo θ formato con l'orizzontale dalla sferetta allorché abbandona il profilo; b) la quota s a cui si trova la molla. **(4)**



a) La sferetta raggiunge il punto di distacco B con velocità

$$v_B = \sqrt{2gh},$$

quindi descrive una parabola al cui culmine urta la molla comprimendola. Scomponiamo v_B nelle due componenti

$$v_{Bx} = v_B \cos\theta,\ v_{By} = v_B \sin\theta.$$

La prima componente, che si maniene costante lungo tutta la traiettoria, è responsabile della compressione della molla: tutta l'energia cinetica della sferetta al culmine si trasforma in energia elastica della molla, ovvero

$$\frac{1}{2} m v_{Bx}^2 = \frac{1}{2} m 2gh\cos^2\theta = \frac{1}{2} k d^2,$$

da cui

$$\cos\theta = d\sqrt{\frac{k}{2mgh}} = 2\cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{49}{2\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot 2}} = 0{,}707$$

e quindi

$$\theta = 45°.$$

b) La seconda componente della velocità è invece responsabile del sollevamento della sferetta fino alla quota s, ovvero nel culmine, dove tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia potenziale, avremo

$$\frac{1}{2} m v_{By}^2 = mgs,$$

$$s = \frac{v_{By}^2}{2g} = \frac{2gh\sin^2\theta}{2g} = h\sin^2\theta = \frac{h}{2} = 1\ \text{m}.$$

4.4. Una sferetta puntiforme di massa $m = 200$ g si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza la cui energia potenziale è

$$U(x) = a\,x^2 + b\,x^4 \text{ (in unità SI).}$$

Calcolare il valore delle due costanti, se il punto $x_e = 0{,}3$ m è una posizione di equilibrio e se, quando la sferetta passa dall'origine con velocità $v_o = 1$ m/s, il punto di inversione ha ascissa $x_i = 80$ cm. Precisare inoltre quale tipo di equilibrio si ha nel punto x_i.

(4)

In condizioni di equilibrio (sia stabile, instabile o indifferente) il risultante delle forze deve essere nullo, cioè deve essere $dU/dx = 0$, quindi

$$2\,a\,x + 4\,b\,x^3 = 0,$$

da cui

$$a + 2\,b\,x^2 = 0.$$

Per $x_e = 0{,}3$ m, risulta

$$a + 0{,}18\,b = 0.$$

Nell'origine l'energia della sferetta è solo cinetica, mentre nel punto di inversione è solo potenziale (essendo ivi $v = 0$), perciò

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = a\,x_i^2 + b x_i^4,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}64\,a + 0{,}41\,b,$$

$$6{,}4\,a + 4{,}1\,b = 1.$$

Risolvendo il sistema di due equazioni nelle due incognite a e b, si ricava

$$a = -\,0{,}06 \text{ N/m}, \quad b = 0{,}34 \text{ N/m}^3.$$

L'espressione di U è allora

$$U\,(x) = -\,0{,}06\,x^2 + 0{,}34\,x^4.$$

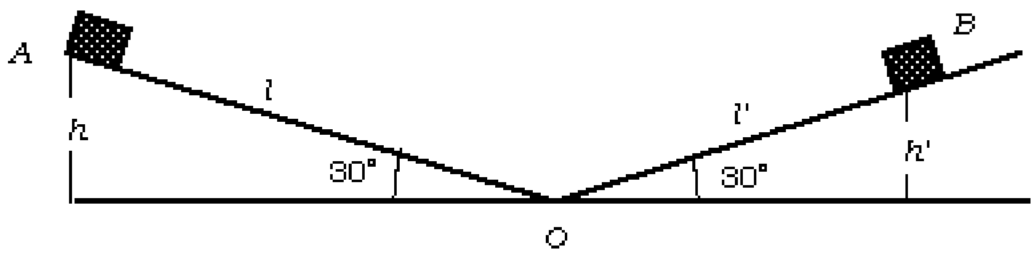
Per stabilire il tipo di equilibrio nel punto x_e, si deve determinare il segno della derivata d^2U/dx^2 in tale punto. Risulta

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0{,}25 > 0,$$

pertanto l'energia potenziale presenta ivi un minimo e si tratta di equilibrio stabile.

4.5. Un blocco di ferro inizialmente in quiete nel punto A viene lasciato scivolare lungo il profilo scabro indicato in figura con l = 12 m e risale per un tratto l'= 10 m lungo la seconda parte. Calcolare: a) il coefficiente di attrito del profilo, b) in quale punto si fermerà il blocco.

(3)



a) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia tenendo conto che l'energia potenziale del blocco nella posizione A verrà trasformata in lavoro contro le forze di attrito lungo i due piani e in energia potenziale alla quota h':

$$m\,g\,h = \mu\,m\,g\,l\cos\alpha + \mu\,m\,g\,l'\cos\alpha + m\,g\,h',$$

da cui

$$\mu = \frac{h-h'}{(l+l')\cos\alpha} = \frac{(l-l')\sin\alpha}{(l+l')\cos\alpha} = \tan\alpha\frac{l-l'}{l+l'} = 0{,}05.$$

Essendo $\mu < \tan 30°$, il blocco, arrivato in B, ridiscenderà e arriverà sul primo piano a una quota h'' tale che

$$m\,g\,h' = \mu\,m\,g\,(l' + l'')\cos\alpha + m\,g\,h'',$$

da cui

$$h'' = h'\frac{\tan\alpha - \mu}{\tan\alpha + \mu} = 4{,}2\ \text{m}.$$

b) Indicando con

$$r = \frac{\tan\alpha - \mu}{\tan\alpha + \mu} = 0{,}84,$$

il blocco continuerà a oscillare da un piano all'altro risalendo ogni volta fino all'84% della quota di partenza. È ovvio che esso finirà col fermarsi nel punto O dopo un numero infinito di oscillazioni.

4.6. Una particella di massa m = 10 g si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa caratterizzata da energia potenziale $U = x^2-8x+15$ (in unità SI). Calcolare: a) la forza agente nella posizione x = 3 m; b) la posizione di

equilibrio della particella, precisando di quale tipo di equilibrio si tratta; c) la velocità v_0 con cui la particella deve essere lanciata da tale posizione perché il suo moto resti confinato tra le posizioni x_1 = 3 m e x_2 = 5 m.

(5)

---

a) La forza agente è

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -(2x-8) = -2x+8 = 2 \text{ N}.$$

b) L'equilibrio si ha per $F_x = 0$, cioè per x_e = 4 m; per stabilire se l'equilibrio è stabile, instabile o indifferente, si deve verificare se l'energia potenziale è rispettivamente minima, massima o costante.
Calcoliamo quindi la derivata seconda di U in corrispondenza della posizione in cui la derivata prima si annulla e otteniamo

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2.$$

Essendo la derivata seconda positiva, ci troviamo in corrispondenza di una minimo dell'energia potenziale, quindi l'equilibrio è stabile.

c) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia nelle posizioni x_e e x_2 o x_1:

$$\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + U\right)_{x_e} = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + U\right)_{x_1},$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + x_e^2 - 8x_e + 15 = 0 + x_1^2 - 8x_1 + 15,$$

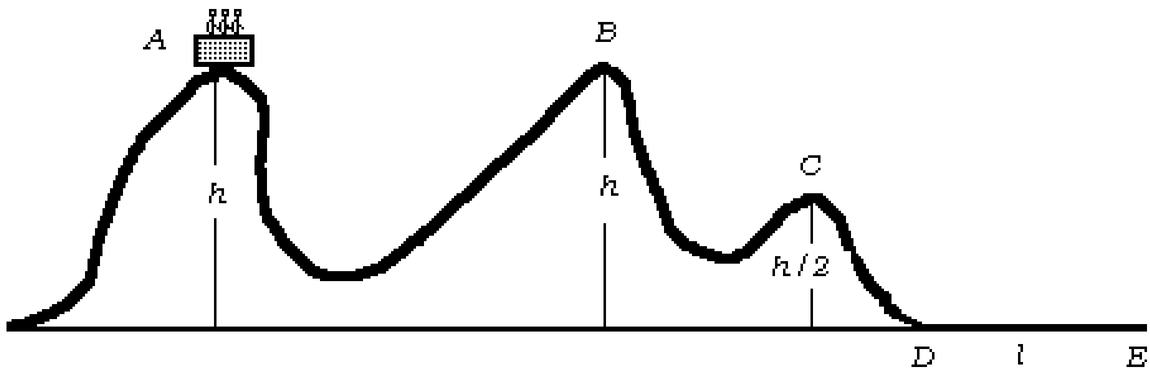
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 9 - 24 + 15 - 16 + 32 + 15 = 1,$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} = 14{,}1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

È ovvio, come lo studente farebbe bene a verificare, che lo stesso risultato si trova nella posizione x_2.

4.7. Il carrello di un ottovolante passa dalla posizione A a quota h = 12 m con velocità v_A = 20 m/s e percorre il profilo indicato in figura con attrito trascurabile nei tratti curvilinei, mentre il tratto orizzontale DE presenta un coefficiente di attriro μ = 0,3. Calcolare: a) le velocità del carrello in B e in C; b) la decelerazione che i freni devono applicare per fermare il carrello in E; c) il tempo di frenata.

(3)



a) Trascurando ogni attrito, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia prima tra le posizioni A e B, poi tra B e C, ottenendo

$$\frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + m\, g\, h = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, h,$$

$$v_A = v_B = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$\frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, h = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + m\, g\, \frac{h}{2},$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + g\, h} = \sqrt{400 + 9{,}8 \cdot 12} = 22{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Riapplicando lo stesso principio tra i punti C e D, si ha

$$\frac{1}{2}\, m\, v_D^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + m\, g\, \frac{h}{2}.$$

Tale energia cinetica viene dissipata interamente nel tratto DE in lavoro contro gli attriti e in lavoro dei freni; essendo il primo espresso da $\mu\, m\, g\, l$ e il secondo da $m\, a\, l$, avendo indicando con a la decelerazione necessaria, sarà

$$\frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + m\, g\, \frac{h}{2} = m\, l(\mu\, g + a),$$

da cui

$$a = \frac{v_C^2 + g\, h - 2\, \mu\, l g}{2\, l} = \frac{v_A^2}{2\, l} - \mu\, g = \frac{400}{40} - 0{,}3 \cdot 9{,}8 = 7{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

c) La decelerazione complessiva è $a + \mu\, g$, per cui, essendo $v_E = 0$, si ha

$$v_E = v_D - (a + \mu\, g)\, t = 0,$$

$$t = \frac{v_D}{a + \mu\, g} = \frac{\sqrt{v_C^2 + g\, h}}{a + \mu\, g} = 2{,}52\ s.$$

4.8. Un tuffatore di massa m = 80 kg posto all'estremità di un trampolino spicca un salto verticale fino all'altezza h = 40 cm e ricade sul trampolino provocandone un abbassamento di un tratto d = 10 cm. Considerando il trampolino come un sistema elastico, calcolare: a) la costante elastica del trampolino, b) di quanto si è abbassato l'estremo del trampolino quando l'uomo è fermo su esso in equilibrio. **(5)**

a) L'energia potenziale persa dal tuffatore quando ricade e abbassa il trampolino di un tratto d si trasforma in energia elastica del trampolino, considerato come una molla ideale:

$$m\,g\,(h+d) = \frac{1}{2}\,k\,d^2,$$

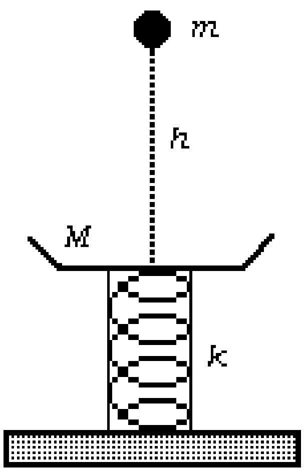
$$k = \frac{2m\,g\,(h+d)}{d^2} = \frac{2\cdot 80\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5}{10^{-2}} = 7{,}84\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) Quando l'uomo è fermo sul trampolino, il suo peso $m\,g$ equilibra la forza elastica; se s è l'abbassamento

$$m\,g = k\,s,$$

$$s = \frac{m\,g}{k} = 10^{-2}\ \text{m} = 1\ \text{cm}.$$

4.9. Un oggetto di massa m = 100 g viene lasciato cadere sul piatto di una bilancia dinamometrica la cui molla, per effetto del peso del piatto di massa M = 1 kg è compressa di un tratto d = 2 cm. Se l'altezza di caduta è h = 30 cm dal piatto e se l'oggetto non rimbalza sul piatto, a) quale sarà la massima compressione della molla? b) quale la compressione della molla all'equilibrio? **(5)**



a) Indicando con x la massima compressione della molla per effetto della caduta della massa m, possiamo scrivere che l'energia potenziale persa dalla massa m e dal piatto si è trasformata in energia elastica di compressione della molla, ovvero

$$m\,g(h+x)+M\,g\,x=\frac{1}{2}\,k\left[(d+x)^2-d^2\right]$$
$$2m\,g(h+x)+2M\,g\,x=k(x^2+2\,d\,x),$$

$$k\,x^2-2\,x\,(M\,g+m\,g-k\,d)-2m\,g\,h=0.$$

Ma, dalle condizioni di equilibrio iniziale si ha anche:

$$M\,g=k\,d,$$

perciò

$$M\,x^2-2m\,d\,x-2m\,d\,h=0,$$

$$x=\frac{m\,d\pm\sqrt{m^2d^2+2\,M\,m\,d\,h}}{M}=2\cdot10^{-3}\pm11{,}13\cdot10^{-3}=13{,}13\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}=$$
$$=1{,}31\ \mathrm{cm}.$$

b) La compressione all'equilibrio si ottiene ancora ponendo

$$(M+m)\,g=k\,x_0=\frac{M\,g\,x_0}{d},$$

da cui

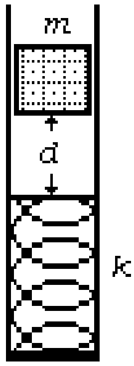
$$x_0=\frac{(M+m)\,d}{M}=\frac{1{,}1\cdot2\cdot10^{-2}}{1}=2{,}2\ \mathrm{cm}.$$

La caduta della massa m ha quindi provocato un'ulteriore compressione della molla di 2 mm.

La massima compressione risulta quindi circa 6,5 superiore a quella all'equilibrio. Questo vuol dire che quei negozianti che eseguono la cosidetta "pesata a lancio" possono frodare l'acquirente di quantità enormi: 1 hg di prosciutto lasciato cadere da 30 cm di altezza risulta avere una massa di 6,5 hg!

4.10. Un ascensore di massa m = 1000 kg è fermo al primo piano di uno stabile quando il cavo di sostegno si spezza e l'ascensore con un salto d = 3 m cade su un mollone ammortizzatore (ideale) di rigidità k = 10^5 N/m. Un dispositivo di sicurezza sviluppa sulle guide una forza di attrito costante F = 6 kN che attenua gli effetti della caduta. Supponendo che l'attrito sulle guide cessi non appena l'ascensore tocca il mollone, calcolare: a) Con quale velocità l'ascensore urterà il mollone; b) la massima compressione del mollone in seguito all'urto.

(5)



a) La variazione di energia meccanica di tutto il sistema fino all'istante in cui l'ascensore entra in contatto con il mollone deve uguagliare il lavoro compiuto contro gli attriti sulle guide. Quando l'ascensore scende per un tratto *d*, esso acquista energia cinetica e perde energia potenziale, quindi

$$\frac{1}{2}mv^2 - m\,g\,d = -Fd,$$

$$v = \sqrt{2d(g - \frac{F}{m})} = \sqrt{6(9,8 - \frac{600 \cdot 9,8}{10^3})} = 4,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Al momento dell'impatto l'ascensore possiede energia cinetica ed energia potenziale, mentre nella posizione di massima compressione l'energia cinetica sarà nulla e abbiamo energia potenziale dell'ascensore ed energia elastica dell'ammortizzatore compresso di un tratto *x*. Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,x = \frac{1}{2}\,k\,x^2,$$

$$d(m\,g - F) + m\,g\,x = \frac{1}{2}\,k\,x^2,$$

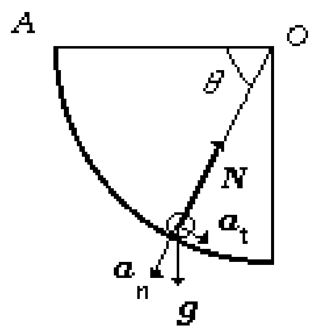
$$k\,x^2 - 2m\,g\,x - 2\,d(m\,g - F) = 0,$$

$$x = \frac{m\,g \pm \sqrt{m^2g^2 + 2\,k\,d(m\,g - F)}}{k} = \frac{9800 \pm \sqrt{9800^2 + 6 \cdot 10^5 \cdot 9,8 \cdot 400}}{10^5} = $$
$$= 59,3\ \text{cm}.$$

La radice negativa dell'equazione non ha ovviamente alcun significato fisico.

N.B. Facciamo notare che non abbiamo utilizzato il valore di v calcolato in a), ma abbiamo sostituito l'espressione letterale dell'energia cinetica per evitare approssimazioni numeriche eccessive.

4.11. Una sferetta puntiforme di massa m = 50 g scivola lungo un profilo circolare liscio di raggio r = 20 cm partendo dalla posizione A di quiete. Calcolare nella posizione angolare θ = 60°: a) la velocità, b) l'accelerazione, c) la forza esercitata dalla sferetta sulla guida. **(5)**



a) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia, visto che non ci sono attriti; assumendo lo zero dell'energia potenziale alla quota di partenza, in una generica posizione angolare θ abbiamo, indicando con v la velocità della sferetta:

$$0 = -m\,g\,r\sin\theta + \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

da cui

$$v = \sqrt{2 g\, r\sin\theta} = \sqrt{19{,}6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}866} = 1{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) L'accelerazione della sferetta è tangenziale e vale

$$a_t = g\cos\,\theta = 9{,}8\cdot 0{,}5 = 4{,}9\ \text{m/s}^2.$$

Esiste anche un'accelerazione normale o centripeta data da

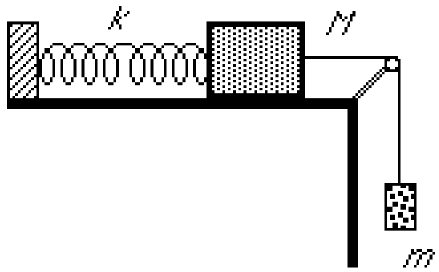
$$a_n = v^2/r = 2\,g\,\sin\theta = 19{,}6\cdot 0{,}866 = 17\ \text{m/s}^2.$$

c) La forza esercitata dalla sferetta sulla guida avrà direzione radiale e sarà uguale e contraria a quella esercitata dalla guida sulla sferetta. Indicando quest'ultima con N e scrivendo la legge fondamentale della dinamica in direzione radiale, otteniamo:

$$\begin{gathered} N - m\,g\,\sin\theta = m\,a_n, \\ N = m\,g\,\sin\theta + 2\,m\,g\,\sin\theta = \\ = 3\,m\,g\,\sin\theta = \\ = 3\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}866 = 1{,}3\ \text{N}. \end{gathered}$$

4.12. Un blocco di massa M = 2 kg appoggiato su un piano liscio è vincolato a una molla ideale di rigidità k = 98 N/m; se, mediante una carrucola, gli si appende un blocco di massa m = 1 kg, calcolare: a) il massimo allungamento della molla, b) la tensione del filo all'equilibrio, c) il periodo di oscillazione allorché la massa m viene tirata leggermente verso il basso e poi rilasciata.

(5)



a) Il massimo allungamento della molla si ricava tenendo conto che l'energia potenziale persa dalla massa m scendendo di un tratto x si è trasformata in energia potenziale elastica della molla, cioè

$$m\,g\,x = \frac{1}{2}\,k\,x^2,$$

$$x = \frac{2\,m\,g}{k} = \frac{19,6}{98} = 20 \text{ cm}.$$

b) La tensione del filo all'equilibrio uguaglia il peso della massa m, cioè

$$T = m\,g = 9{,}8 \text{ N}.$$

c) Scriviamo, utilizzando il diagramma a blocchi, le leggi di moto delle due masse, indicando con a l'accelerazione della massa m verso il basso e tenendo presente che la tensione del filo si identifica con la forza di richiamo della molla $-\,k\,x$:

$$-\,k\,x = M\,a,$$
$$k\,x + m\,g = m\,a.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ha

$$-2\,k\,x - m\,g = (M - m)\,a,$$

$$a = -\frac{2\,k\,x}{M-m} - \frac{m\,g}{M-m},$$

tipica equazione differenziale di un moto armonico semplice di periodo

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{M-m}{2\,k}} = 6,28\sqrt{\frac{1}{196}} = 0,45 \text{ s}.$$

4.13. Due molle ideali di rigidità k_1 = 16 N/m e k_2 = 4 N/m compresse della stessa quantità lanciano in direzione orizzontale dalla stessa quota due masse identiche. Trascurando ogni attrito, calcolare il rapporto tra le due gittate.

(2)

L'energia elastica di ciascuna molla si trasforma in energia cinetica della massa lanciata; poiché la formula della gittata contiene la velocità al quadrato, scriviamo il rapporto tra i quadrati delle velocità, che sarà

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{\frac{1}{2} m v_2^2} = \frac{\frac{1}{2} k_1 x^2}{\frac{1}{2} k_2 x^2} = \frac{k_1}{k_2} = 4.$$

L'equazione della parabola, detta h la quota comune di lancio ed essendo nullo l'angolo di alzo, è

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2} + h.$$

Quando le masse sono al suolo sarà per entrambe $y = 0$ e x misura la gittata G, pertanto il rapporto cercato sarà

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = 4.$$

4.14. Un blocco è in equilibrio appeso in un piano verticale a due identiche molle ideali collegate in parallelo; se viene tirato verso il basso di un tratto x = 3 cm e poi rilasciato, calcolarne il periodo di oscillazione.

(4)

Indicando con k la rigidità di ciascuna delle due molle, il loro collegamento in parallelo equivale a una sola molla di rigidità equivalente $k_e = 2\,k$.

Se il blocco di massa m viene tirato verso il basso di un tratto x, l'energia elastica delle molle aumenta a spese della diminuzione di energia potenziale del blocco, ovvero sarà

$$\frac{1}{2}(2k)x^2 = m\,g\,x,$$

$$x = \frac{m\,g}{k}.$$

Il periodo di oscillazione sarà quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\,k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{2\,g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{3\cdot 10^{-2}}{19{,}6}} = 0{,}25 \text{ s}.$$

4.15. Una molla ideale di rigidità k = 200 N/m è compressa orizzontalmente di x_1 = 12 cm da una sferetta bloccata da un fermo; se la si comprime ulteriormente di x_2 = 6 cm e la si lascia libera di oscillare, a) quale sarà l'ampiezza di oscillazione? b) e quale l'energia meccanica dell'oscillatore?

(3)

---

a) La molla, lasciata libera, si espande di un tratto $x_1 + x_2$ = 18 cm che costituisce l'ampiezza di oscillazione.

b)

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = 200 \cdot 3,24 \cdot 10^{-2} = 6,48 \text{ J}.$$

4.16. Un corpo puntiforme di massa m = 100 g percorre l'asse x con legge oraria $x = t^3 + 2t^2 - 1$ (in unità SI). Calcolare: a) il lavoro compiuto per mantenere il corpo in moto per t = 3 s; b) la potenza all'istante t = 3 s e la potenza media nei primi 3 s; c) l'energia meccanica totale a distanza d = 2 m dall'origine.

(4)

---

a) Dal teorema dell'energia cinetica, $L = \Delta K$, possiamo ricavare la velocità del corpo

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4t,$$

quindi

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 ,$$

Ma la velocità iniziale è nulla, perciò

$$L = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} (3 \cdot 9 + 4 \cdot 3)^2 = 76 \text{ J} .$$

b) Sarà

$$W = \frac{\delta L}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(3t^2 + 4t)^2 =$$
$$= m(3t^2 + 4t)(6t + 4) = 10^{-1}(39)(22) = 85,8 \text{ W}.$$

La potenza media sarà invece

$$W_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{76}{3} = 25,3 \text{ W} .$$

In quale caso la potenza media coincide con quella istantanea?

c) La forza non è conservativa, essendo dipendente dal tempo; infatti:

$$v = 3t^2 + 4t; \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4; \qquad F = ma = m(6t + 4).$$

Ne deriva che l'energia meccanica totale è solo cinetica. A distanza d dall'origine si ha:

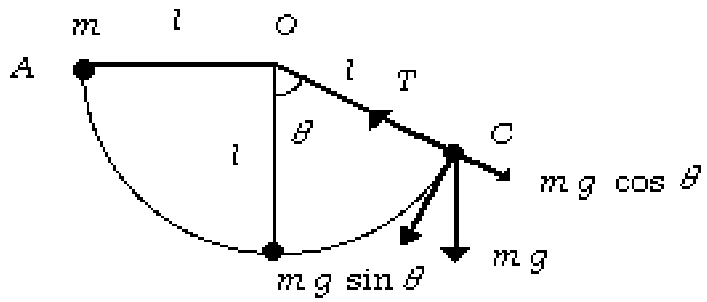
$$t^3 - 2t^2 - 1 = 2\ , \qquad t^3 + 2t^2 - 3 = 0\ , \qquad (t-1)(t^2 + 3t + 3) + 0\ ,$$

la cui sola soluzione reale è t = 1 s; sostituendo tale valore nell'espressione della velocità, abbiamo:

$$E = K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \cdot 7^2 = 2{,}45 \text{ J}\ .$$

4.17. Un filo ideale di lunghezza l fissato per un estremo O a un sostegno recando appesa una sferetta di massa m viene lasciato libero in un piano verticale dalla posizione orizzontale A. Esprimere, in funzione delle grandezze assegnate: a) la tensione T del filo nella posizione angolare θ, b) la velocità nella posizione angolare θ, c) il lavoro compiuto dalla tensione in mezzo giro, d) l'accelerazione tangenziale in posizione verticale.

(4)



---

a) Nella generica posizione C si ha, applicando la seconda legge della dinamica in direzione radiale

$$\frac{m v^2}{l} = T - m g \cos\theta\,,$$

$$T = m g \cos\theta + \frac{m v^2}{l}\,, \qquad (1)$$

nella quale si può ricavare v^2 dal principio di conservazione dell'energia, imponendo che la diminuzione di energia potenziale tra A e C si sia trasformata interamente in energia cinetica nella posizione C, ovvero

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = m\, g\, l \cos\theta\,,$$

$$\frac{m\, v^2}{l} = 2m\, g \cos\theta\,, \qquad (2)$$

che, sostituita nella (1), fornisce

$$T = 3\; m\, g \cos\theta. \qquad (3)$$

b) Per la (2):

$$v = \sqrt{2 g\, l \cos\theta}\;.$$

c) Il lavoro della tensione è sempre nullo, essendo ***T*** perpendicolare allo spostamento tangenziale del pendolo.

d) L'accelerazione in posizione verticale coincide con ***g***, pertanto $a_{\mathrm{t}} = 0$.

4.18. Stabilire se una forza attrattiva il cui modulo è dato, in unità SI, da

$$F = \frac{3}{\sqrt{r}}\,,$$

con r distanza dall'origine degli assi, è conservativa e, in caso affermativo, ricavare l'espressione in funzione di r della corrispondente energia potenziale, sapendo che a distanza r_0 = 1 m dall'origine, U_0 = 9 J.

(2)

———

Possiamo scrivere la forza data come

$$F = -\,3\; r^{-1/2},$$

o, in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{3}{r^{3/2}}\,\boldsymbol{r} = -\frac{3(\boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\,z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,,$$

dove il segno negativo precisa che si tratta di una forza attrattiva.
È facile verificare che le derivate parziali in croce sono uguali

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}\,,$$

quindi ***F*** è conservativa; la corrispondente energia potenziale sarà

$$U(r) = -\int F\, dr = 3\int r^{-1/2} dr = 6\sqrt{r} + \text{costante}.$$

Per determinare la costante di integrazione, basta tener presente che

$$U(1) = 9 \text{ J},$$

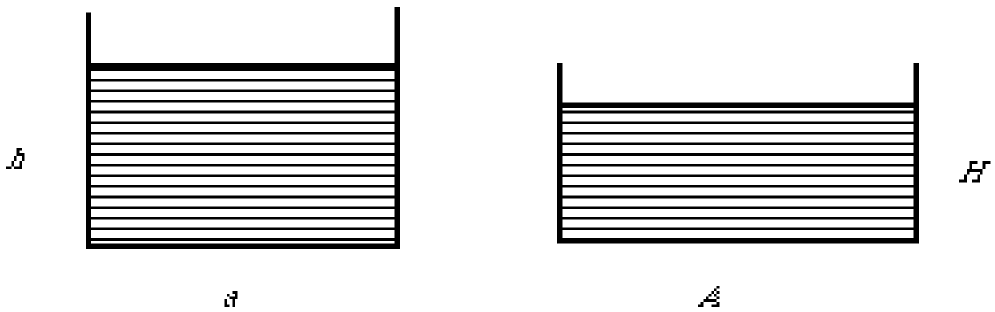
quindi

$$\text{costante} = 9 - 6 = 3 \text{ J};$$

ne consegue che

$$U(r) = 6\sqrt{r} + 3.$$

4.19. Una massa m = 100 kg d'acqua viene travasata da un recipiente nel quale l'acqua raggiunge un'altezza h = 1,2 m in un altro di sezione di base A= 0,1 m^2. a) Calcolare la differenza di energia potenziale nelle due situazioni e b) precisare che cosa rappresenta. **(3)**



a) Se a è la sezione di base del primo recipiente, deve essere

$$m = \rho\, a\, h,$$

da cui

$$a = \frac{m}{\rho\, h} = \frac{100}{1000 \cdot 1{,}2} = 0{,}083 \text{ m}^2.$$

L'altezza dell'acqua nel secondo recipiente è

$$H = \frac{a}{A}\, h = \frac{0{,}083 \cdot 1{,}2}{0{,}1} = 1 \text{ m}.$$

L'energia potenziale dell'acqua nel primo recipiente è

$$U_{\text{i}} = m\, g \frac{h}{2},$$

mentre nel secondo è

$$U_{\text{f}} = m\, g \frac{H}{2};$$

la loro differenza vale

$$\Delta U = U_{\text{f}} - U_{\text{i}} = \frac{m\, g}{2}(H - h) = -98 \text{ J}.$$

b) L'energia potenziale del sistema è quindi diminuita; se ricordiamo il teorema dell'energia potenziale

$$L = -\Delta U,$$

dove L è il lavoro delle forze del campo, vuol dire che il campo di gravità terrestre ha compiuto un lavoro positivo, cioè motore; l'uomo che ha operato il travaso ha invece compiuto un lavoro uguale e opposto, cioè resistente.

4.20. Un punto materiale di massa m = 40 g, inizialmente in quiete nell'origine, si muove nel piano (x, y) sotto l'azione di una forza di componenti $F_x = 4\ t^2$ ed $F_y = 2\ t$. a) Ricavare l'equazione della traiettoria, b) stabilire se la forza è conservativa, c) calcolare il lavoro della forza per spostare il punto dalla posizione A (1,1) alla posizione B (2,2) precisando, se necessario, il percorso prescelto.

(4)

---

a)

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{4t^2}{m} \quad , \qquad a_y = \frac{2t}{m} \quad ;$$

$$v_x = \frac{4t^3}{3m} \quad , \qquad v_y = \frac{t^2}{m} \quad ;$$

$$x = \frac{t^4}{3m} \quad , \qquad y = \frac{t^3}{3m} \quad ;$$

$$y = \frac{x^{3/4}}{\sqrt[4]{3m}} .$$

b) Per rispondere, si devono esprimere le componenti F_x ed F_y rispettivamente in funzione di y e di x:

$$F_x = 4\,t^2 = 4(3\,m\,y)^{2/3} \ ,$$

$$F_y = 2\,t = 2(3\,m\,x)^{1/4} \ .$$

Calcolando le derivate parziali, si scopre che

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} ,$$

perciò la forza non è conservativa.

c) Non essendo la forza assegnata conservativa, dobbiamo precisare lungo quale percorso calcoliamo il lavoro; scegliamo il segmento rettilineo AB.

$$L = \int_1^2 F_x\ dx + \int_1^2 F_y\ dy = \int_1^2 (3\ m\ y)^{2/3} dx + \int_1^2 2(3\ m\ x)^{1/4}\ dy \qquad ;$$

lungo il percorso prescelto è $y = x$, pertanto

$$L = 4\int_1^2 (3\,m\,y)^{2/3} dy + 2\int_1^2 (3\,m\,x)^{1/4} dx =$$

$$= 4(3m)^{2/3} \int_1^2 y^{2/3} dy + 2(3m)^{1/4} \int_1^2 x^{1/4} dx =$$

$$= 4(3m)^{2/3} \left[y^{5/3} \right]_1^2 + 2(3m)^{1/4} \left[x^{5/4} \right]_1^2 = 3,73\ \text{J}.$$

c) Applicando le relazioni che correlano le componenti della forza con l'energia potenziale:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -1\,; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -4\,y\,; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -9\,z^2\,,$$

da cui

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{1 + 16\,y^2 + 81\,z^4} = \sqrt{1 + 64} = 8{,}1\ \text{N}.$$

4.21. Una pista orizzontale presenta un coefficiente di attrito funzione lineare della distanza del tipo $\mu = k\ x$. Se un corpo puntiforme parte dall'origine con velocità v_o, determinare, in funzione di k, v_o e g, a) la distanza di arresto, b) il tempo di arresto.

(5)

---

a) Applicando la seconda legge di Newton e tenendo conto che la sola forza agente nella direzione di moto è la forza di attrito, abbiamo:

$$m\ a = -\mu\ m\ g = -k\,x\,m\ g\,,$$

$$a = \frac{dv}{dt} - k\,x\,g\,,$$

$$dv = -k\,g\,x\ dt = -k\,g\,x\,\frac{dx}{v}\,,$$

$$v\ dv = -k\,g\,x\ dx\,.$$

Integrando e tenendo conto che per $x = 0$ è $v = v_o$:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{2}\,k\,gx^2 + \text{costante} = -\frac{1}{2}\,k\,gx^2 + \frac{v_o^2}{2}\,,$$

da cui

$$v^2 = v_o^2 - k\,g\,x^2\,;$$

facciamo notare che per $x = d$ il corpo è fermo, pertanto

$$0 = v_o^2 - k\,g\,d^2\,,$$

e quindi

$$d = \frac{v_o}{\sqrt{k\,g}}\,,$$

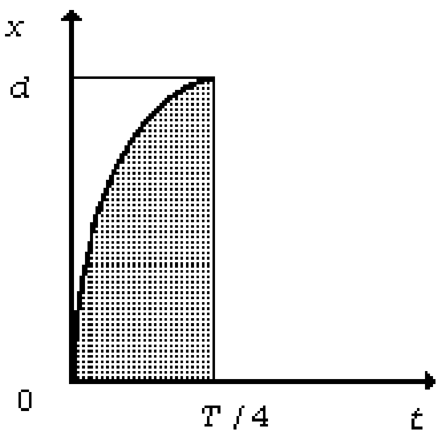
come si può ricavare agevolmente anche applicando il teorema dell'energia cinetica nella forma

$$L = \int_0^d F_x dx = \int_0^d \mu\,m\,g\,dx = \int_0^d k\,x\,m\,g\,dx = \frac{1}{2}\,k\,m\,g\,d^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_o^2.$$

b) Si noti che l'equazione differenziale

$$a = -\,k\,g\,x$$

è tipica di un moto armonico semplice, ma non possiamo certo affermare che il corpo si muove di moto armonico; infatti esso, arrivato con velocità nulla alla distanza d, non è più soggetto ad alcuna forza di richiamo verso l'origine e vi si ferma. Il grafico orario del moto è costituito da un quarto di sinusoide.



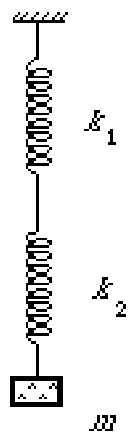
Questa osservazione ci permette di calcolare rapidamente il tempo di arresto, che risulta pari a un quarto dell'ipotetico periodo del moto, ovvero

$$t_{\text{arresto}} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\,\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{k\,g}}\,.$$

Lo stesso calcolo diventa estremamente complesso se si prova a integrare l'equazione differenziale di partenza.

4.22. Il sistema delle due molle indicato in figura subisce in equilibrio un allungamento x = 9,8 cm quando la massa appesa è m = 1 kg. Se $k_2 = 5\,k_1$, calcolare: a) k_1, k_2, x_1, x_2, b) la differenza di energia meccanica totale tra la posizione a molle scariche e quella di equilibrio.

(3)



---

a) Dovrà essere $x = x_1 + x_2$, dove

$$x_1 = \frac{m\,g}{k_1} \quad , x_2 = \frac{m\,g}{k_2}$$

e, essendo le due molle in serie

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

è la costante elastica equivalente del sistema delle due mol

Risulta allora:

$$x_1 = 8{,}17 \text{ cm} , \quad x_2 = 1{,}63 \text{ cm} ,$$

$$k_1 = 120 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad , \quad k_2 = 600 \frac{\text{N}}{\text{m}} \,.$$

b) Le molle scariche non posseggono alcun tipo di energia, essendo ideali e quindi prive di massa; quando si appende la massa m, questa scende di un tratto x e quindi perde energia potenziale, mentre le due molle allungandosi, immagazzinano energia elastica; sarà allora

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\, k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}\, k_2 x_2^2 + m\, g\, x = \frac{m\, g\, x}{2} = 0{,}48 \text{ J} .$$

4.23. Un punto materiale è immerso in un campo di forze di energia potenziale $U = x + 2y^{\,2} + 3\, z^{\,3,}$ dove tutte le unità sono SI. Stabilire: a) se il campo è conservativo, b) il valore del lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare il punto dal punto A (1,1,1 m) al punto B (2,2,2 m). c) il modulo della forza nella posizione P (3,–2,0 m).

(3)

---

a) Il fatto che esista energia potenziale certifica che il campo di forze è conservativo, perciò non è necessaria alcuna verifica.

b)

$$L = -\,\Delta U = U\,(1,1,1) - U\,(2,2,2) = -\,28 \text{ J}.$$

c) Applicando le relazioni che correlano le componenti della forza con l'energia potenziale:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -1\,; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -4\,y\,; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\,9\,z^2\,,$$

da cui

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{1 + 16y^2 + 81\,z^4} = \sqrt{1 + 64} = 8{,}1 \text{ N}.$$

4.24. Una sferetta di massa m = 5 g è fissata in un piano orizzontale liscio all'estremo libero di una molla ideale il cui secondo estremo è vincolato a una parete. Se si tira la sferetta in modo da allungare la molla di s = 8 cm e poi la si rilascia, questa si muove di moto armonico attorno alla posizione di equilibrio iniziale. Se l'energia elastica della molla quando la sferetta occupa la posizione x misurata dalla parete è $U = 100\, x^{\,2} - 20\, x + +1$, in unità SI, calcolare: a) la lunghezza iniziale della molla, b) la costante elastica della molla, c) la velocità con cui la sferetta ripassa dalla posizione di equilibrio.

(5)

---

a), b) Possiamo scrivere che l'energia elastica della molla di lunghezza a riposo l_o e di lunghezza x dopo l'allungamento è

$$\frac{1}{2}k(x - l_o)^2 = 100\,x^2 - 20\,x + 1,$$

$$k\,x^2 + k\,l_o^2 - 2\,k\,x\,l_o = 200x^2 - 40x + 2.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di I e II grado, si ottiene

$$k = 200 \text{ N/m},$$

$$l_o = \frac{20}{k} = 0{,}1\,\text{m} = 10\,\text{cm}.$$

Dovendo essere unica la soluzione, dovrà essere necessariamente

$$l_o = 10 \text{ cm}.$$

c) Per ricavare la velocità con cui la sferetta ripassa dalla posizione di equilibrio, scriviamo che l'energia elastica all'estremo di oscillazione diventa nella posizione di equilibrio solo energia cinetica, cioè

$$\frac{1}{2}\, m\, v_o^2 = \frac{1}{2}\, k\, s^2,$$

da cui:

$$v_o = s\sqrt{\frac{k}{m}} = 16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

4.25. Un'auto di massa m = 1000 kg sta percorrendo un tratto di strada orizzontale con velocità costante v = 108 km/h, quando la strada comincia a salire con inclinazione costante α = 20° e il guidatore, per mantenere la stessa velocità, preme sull'acceleratore in modo da aumentare di un fattore n = 3 la potenza richiesta al motore. Se la forza resistente dovuta all'aria è del tipo $F = k\, v$, calcolare, trascurando tutti gli altri attriti, la costante k in unità SI.

(3)

La potenza del motore nel tratto pianeggiante è

$$W_i = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = k\, v^2,$$

mentre, durante la salita, il motore deve lavorare anche contro la gravità e sarà quindi

$$W_f = k\, v^2 + m\, g\, v \sin\alpha,$$

ma

$$W_f = n\, W_i,$$

per cui

$$k = \frac{m\, g \sin\alpha}{(n-1)\, v} = \frac{1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}342}{2 \cdot 30} = 55{,}9\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}\,.$$

4.26. Una particella di massa m = 100 g è soggetta a una forza $\boldsymbol{F} = 2\, t\, \boldsymbol{i} + + 3\, t^2 \boldsymbol{j}$ (in unità SI). Calcolare: a) la potenza dissipata nell'istante t = 4 s dall'applicazione della forza e b) il lavoro di tale forza nell'intervallo (0–2) s.

(4)

a) Dall'espressione vettoriale della forza agente si ricava, mediante successive integrazioni:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{2\,t}{m}\,; \qquad v_x = \frac{t^2}{m}\,;$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{3\,t^2}{m}\,; \qquad v_y = \frac{t^3}{m}\,.$$

La potenza si può esprimere come

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = F_x v_x + F_y v_y = \frac{2\,t^3}{m} + \frac{3\,t^5}{m}\,,$$

che, calcolata nell'istante $t = 4\,\text{s}$, fornisce:

$$W = \frac{t^3}{m}\,(2 + 3\,t^2) = 32\ \text{kW}\,.$$

b) Per calcolare il lavoro si può procedere in due modi diversi: applicando il teorema dell'energia cinetica e osservando che la particella è inizialmente in quiete e ottenendo

$$L = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2m}\,(t^4 + t^6) = \frac{1}{0{,}2}\,(2^4 + 2^6) = 400\ \text{J}\,.$$

Alternativamente si può calcolare il lavoro come integrale definito della potenza:

$$L = \int_0^2 W\,dt = \int_0^2 \frac{2\,t^3 + 3\,t^5}{m}\,dt = \frac{1}{2m}\Big[\,t^4 + t^6\,\Big]_0^2\,,$$

che coincide con la precedente espressione.

4.27. 4 molle ideali identiche vengono collegate in parallelo per sostenere verticalmente un blocco di massa *m*. Se, appendendo il blocco a una sola di esse, essa si allunga, all'equilibrio, di un tratto x_o, quali saranno, in funzione di x_o, a) l'allungamento di ciascuna delle quattro molle in parallelo, b) il massimo allungamento di ciascuna molla?

(4)

a) Ricaviamo prima la rigidità di ogni molla, sapendo che $m\,g = k\,x_o$, ottenendo

$$k = \frac{m\,g}{x_o}\,.$$

Quando colleghiamo in parallelo le quattro molle, la rigidità equivalente è $4k$, perciò l'allungamento x_1 di ciascuna di esse sotto l'azione della massa *m*, sarà

$$x_1 = \frac{m\,g}{4\,k} = \frac{1}{4}\,x_o \ .$$

b) Il massimo allungamento di ciascuna molla, corrispondente alla posizione di massima discesa della massa *m*, si ricava imponendo che l'energia potenziale persa dalla massa che scende di un tratto *x'* si è trasformata in energia elastica immagazzinata da ciascuna molla, ovvero

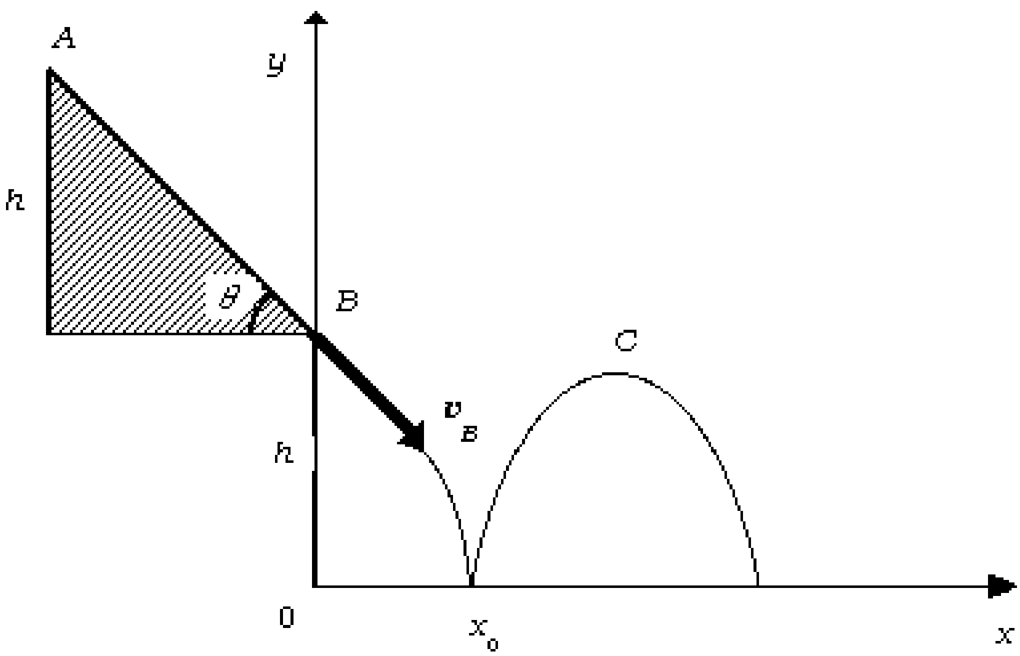
$$m\,g x' = \frac{1}{2}\cdot 4\,k\cdot x'^2 \ ,$$

da cui :

$$x' = \frac{m\,g}{2\,k} = 2\,x_o \ .$$

4.28. Una sferetta puntiforme scivola dal punto *A* di un piano inclinato scabro (μ = 0,4) con θ= 60°. L'altezza del piano è h = 80 cm. Calcolare: a)la velocità nel punto *B*, b) a quale distanza x_o la sferetta tocca terra dalla parete verticale anch'essa di altezza *h*, c) a quale altezza da terra rimbalza la sferetta se l'urto con il suolo è elastico.

(5)



a) Applicando il principio di conservazione dell'energia tra la posizione *A* e quella *B* indicate in figura si ha:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 + \mu\,m\,g\cos\,\theta\,\frac{h}{\sin\,\theta} ,$$

quindi:

$$v_B = \sqrt{2g\,h(1-\mu\cot\text{an}\,\theta)} = 3,47\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Scriviamo l'equazione della traiettoria:

$$y = -\frac{g\,x^2}{2v_B^2\cos^2\theta} - x\tan\theta + h\ ,$$

nella quale, ponendo y = 0, si ricava x_0 :

$$x^2 + 4h\,x(1-\mu\,\text{cotan}\,\theta)\sin\theta\ \cos\theta - 4h^2\cos^2\theta(1-\mu\,\text{cotan}\,\theta) = 0\ ,$$

da cui

$$x = -2\,h\cos\theta\left[\sin\theta\,(1-\mu\ \text{cotan}\theta) \pm \sqrt{(1-\mu\ \text{cotan}\theta)(\sin^2\theta-\mu\ \sin\theta\cos\theta\ +1)}\ \right].$$

Scartando la soluzione negativa in quanto priva di significato fisico, si ricava

$$x_0 = 0{,}35\ \text{m}.$$

c) Tenendo conto che l'urto è elastico, la sferetta rimbalzerà con la stessa velocità con cui tocca terra: basta applicare ancora il principio di conservazione dell'energia tra la posizione *B* e quella alla quale rimbalzerà, ovvero, essendo nulla la velocità al culmine *C*,

$$m\,g\,h + \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 = m\,g\,y\ ,$$

da cui:

$$y = h + \frac{v_B^2}{2g} = 1{,}41\ \text{m}\ .$$

4.29. Quattro molle ideali identiche di rigidità *k* si allungano in un piano verticale, sotto l'azione di una massa *m* di *x* = 2,45 cm ciascuna. Calcolare il massimo periodo di oscillazione tra quelli dei vari modi di collegamento possibili.

(3)

I modi di collegamento possibili sono 12, indicati nella figura del Problema **3.26** con i corrispondenti valori della rigidità equivalente.
Il massimo periodo è quello corrispondente alla minima rigidità, ovvero il caso b). Per calcolarlo, sappiamo che

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{eq}}}},$$

ma sappiamo anche che $m\,g = k_{eq}\,4x = k\,x$, pertanto

$$T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4x}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 12,56\sqrt{\frac{2,45\cdot 10^{-2}}{9,8}} = 0,63\ \text{s}.$$

4.30. Una sottile catena omogenea di lunghezza l = 1 m e massa m = 10 g è appoggiata su un tavolo in modo che la parte verticale sia lunga 0,3 l. Calcolare: a) il massimo coefficiente di attrito del tavolo perché la catena possa scivolare, b) il lavoro compiuto dalle forze di attrito contro lo scivolamento della catena, c) la velocità con cui la catena, appena completamente staccata dal tavolo, comincia a cadere.

(5)

---

a) Il peso del pezzo di catena pendente deve almeno uguagliare la forza di attrito agente sul tratto rimasto sul tavolo, cioè

$$0{,}3\ m\,g \geq 0{,}7\ m\,g\,\mu\ ,$$

da cui

$$\mu_{max} = 0{,}43.$$

b) Il lavoro delle forze di attrito sarà

$$L = \int_0^{0,7} F_{att}\,dx = \mu\,g\int_0^{0,7}\frac{x}{l}\,m\,dx = \frac{\mu\,mg}{2l}\left[x^2\right]_0^{0,7} = 7,2\ \text{mJ}\ .$$

c) Dal teorema dell'energia cinetica, possiamo scrivere che l'energia cinetica acquistata dalla catena – ovvero dal suo centro di massa – è uguale alla differenza tra la diminuzione di energia potenziale dovuta all'abbassamento del centro di massa, y = 0,35 m, e il lavoro compiuto contro le forze di attrito, ovvero

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy - L\ ,$$

da cui

$$v = \sqrt{2\,(g\,y - \frac{L}{m})} = \sqrt{2\left(9,8\cdot 0,35 - \frac{7,2\cdot 10^{-3}}{10^{-2}}\right)} = 2,33\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\ .$$

4.31. Una molla ideale è in equilibrio in un piano verticale sotto l'azione di una massa puntiforme m = 1 kg e risulta allungata di l = 4 cm. a) Ricavare l'espressione letterale del lavoro che si deve compiere per allungare la molla di altri s = 5 cm in funzione di m, g, l, s. b) Calcolare tale lavoro. **(3)**

---

a) In condizioni di equilibrio si ha

$$k\,l = m\,g,$$

quindi

$$k = \frac{mg}{l} \ .$$

Per allungare la molla di un ulteriore tratto s, si deve compiere un lavoro pari alla differenza di energia potenziale elastica della molla nelle due posizioni, ovvero

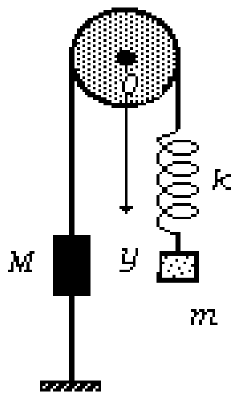
$$L = \Delta U = U_{\mathrm{f}} - U_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\, k(s + l)^2 - \frac{1}{2}\, k\, l^2 = \frac{mgs(s + 2\,l)}{2\,l} \qquad .$$

b) Eseguendo i calcoli, si ricava

$$L = 0{,}8 \text{ J}.$$

4.32. A una fune ideale appoggiata su una carrucola ideale sono appese da un lato una massa M = 200 g fissata al suolo mediante una fune e dall'altro una molla ideale di lunghezza a riposo l = 10 cm e rigidità k = 98 N/m e una massa m = 500 g; le due masse sono alla stessa quota se si tira leggermente la massa m verso il basso, poi rilasciandola, dimostrare che il sistema oscilla di moto armonico semplice. Calcolare: a) il periodo di oscillazione, b) la posizione del centro di oscillazione.

(5)



Il problema si può risolvere in due modi: dal punto di vista energetico, imponendo che l'energia meccanica totale del sistema si mantenga costante e dal punto di vista dinamico mediante il diagramma di corpo libero.

Modo energetico

L'energia meccanica di tutto il sistema comprende l'energia cinetica delle due masse, la loro energia potenziale e l'energia elastica della molla deformata di un tratto y. Assumendo un asse y orientato verso il basso con origine nel centro O della carrucola e tenendo conto che, quando tiriamo verso il basso la massa m la molla si deforma di un tratto $\Delta y = y - l$, l'energia meccanica totale del sistema è

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+(M+m)g\,y+\frac{1}{2}k(y-l)^2=\text{costante.}$$

Differenziando, si ottiene:

$$\frac{1}{2}(M+m)\,2\,v\,dv+(M+m)\,g\,dy+\frac{1}{2}k\,2\,(y-l)\,dy=0,$$
$$\frac{1}{2}(M+m)\,2\,\frac{dy}{dt}\,dv+(M+m)\,g\,dy+\frac{1}{2}k\,2\,(y-l)\,dy=0,$$
$$(M+m)\,a+(M+m)\,g+k\,(y-l)=0,$$

da cui

$$a=-\frac{k}{M+m}\,y+\frac{k\,l}{M+m}-g,$$

equazione di un moto armonico semplice con periodo

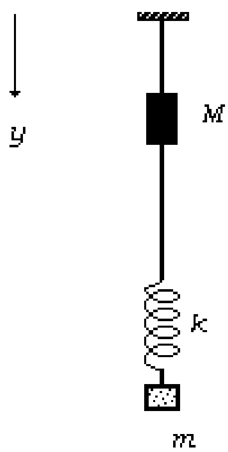
$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}=6{,}28\sqrt{\frac{0{,}7}{98}}=0{,}53\text{ s.}$$

Per ricavare la posizione del centro di oscillazione, basta ricordare che tale punto è caratterizzato da accelerazione nulla, perciò avremo, dall'equazione differenziale del moto armonico con $a = 0$:

$$y_0=l-\frac{(M+m)\,g}{k}=0{,}1-\frac{0{,}7\cdot 9{,}8}{98}=0{,}03\text{ m}=3\text{ cm}.$$

Modo dinamico

La situazione descritta dalla figura è equivalente alla seguente:



tipico sistema massa-molla con massa $M + m$, che oscilla con periodo

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}=6{,}28\sqrt{\frac{0{,}7}{98}}=0{,}53\text{ s.}$$

4.33. Data una forza di componenti $F_x = 1 + 4\,x\,y$, $F_y = 2\,x^2 - 4$, calcolare: a) il lavoro compiuto per spostare un oggetto di massa m = 100 g dal punto A (0,3 m) al punto B (1 m, 6 m) lungo un arco della parabola di equazione

$$y = (3\,x^2 + 3)\ \text{m};$$

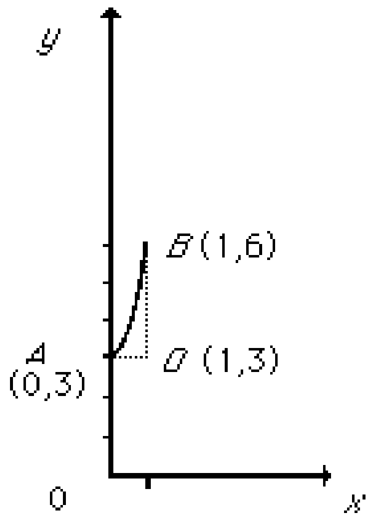
b) l'accelerazione nel punto B. **(4)**

———

a) Stabiliamo se la forza è conservativa, perché, in caso affermativo, potremmo optare per un percorso più comodo dal punto di vista algoritmico. Calcolando le derivate parziali in croce, si ha:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4\,x,$$

pertanto la forza assegnata è conservativa; per calcolare il lavoro richiesto scegliamo un percorso differente, ovvero dal punto A (0,3) m al punto O (1,3) m e dal punto O (1,3) m al punto B (1,6) m lungo segmenti di retta rispettivamente con y costante (= 3 m) e x costante (= 1 m).



Si ottiene

$$L = \int_A^B (F_x\,dx + F_y dy) = \int_A^0 (1 + 4\,xy)\,dx + \int_0^B (2\,x^2 - 4)\,dy =$$

$$= \int_A^0 dx + y\int_A^0 4\,x\,dx + \int_0^B (-4)\,dy + \int_0^B 2\,x^2\,dy =$$

$$= [x]_0^1 + 3\Big[2\,x^2\Big]_0^1 - 4[y]_3^6 + 2[y]_3^6 = 1 + 6 - 12 + 6 = 1\ \text{J}.$$

b)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{m}\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{1}{0{,}1}\sqrt{25^2 + 2^2} = 250{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.34. Calcolare la potenza che deve fornire il motore di un'auto per vincere una resistenza dell'aria del tipo $F = k\ v^{2}$, quando procede con velocità v = 180 km/h, sapendo che la potenza necessaria alla velocità v_1 = 144 km/h è W_1 = 40 kW. **(2)**

———

Sarà

$$W_1 = F v_1 = k v_1^3$$

e

$$W = k v^3,$$

da cui:

$$W = W_1 \frac{v^3}{v_1^3} = 4 \cdot 10^4 \left(\frac{180}{144}\right)^3 = 78\,\text{kW}.$$

4.35. Una molla ideale sotto l'azione di una forza F = 9 N si allunga di s = 30 cm; calcolare a) la rigidità della molla, b) la forza media necessaria per allungare la molla di altri r = 40 cm.

(2)

———

a) Applicando la legge di Hooke:

$$k = \frac{F}{s} = \frac{9}{0,3} = 30\ \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) Quando la molla è allungata di s, essa immagazzina un'energia elastica pari a $ks^2/2$, mentre, quando viene allungata di un ulteriore tratto r, l'energia immagazzinata è $k\ (s+r)^2/2$.
La differenza tra i due valori rappresenta il lavoro che si è dovuto compiere per allungare la molla di r, pertanto

$$\bar{F}\ r = \frac{1}{2}\ k\left[(r + s)^2 - s^2\right] = \frac{k\,r}{2}\,(r + 2\,s),$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2}\ k\,(r + 2\,s) = 15\ \text{N}.$$

4.36. Un blocco di massa m = 1 kg è collegato su un piano orizzontale liscio a una molla ideale di rigidità k = 1 N/m; se lo si sposta di s = 10 cm e poi lo si rilascia, calcolare: a) con quale velocità ripassa dalla posizione iniziale, b) la frequenza di oscillazione, c) la massima accelerazione. **(3)**

———

a) Quando il blocco viene spostato e la molla allungata di s, questa immagazzina l'energia elastica $k\ s^2/2$; non appena rilasciato, il blocco inizia scaricare la molla che si scarica completamente quando esso ripassa dalla posizione iniziale, dove l'unica energia è quella cinetica del blocco, ovvero

$$\frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = s\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}1\sqrt{\frac{1}{1}} = 10\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

b)

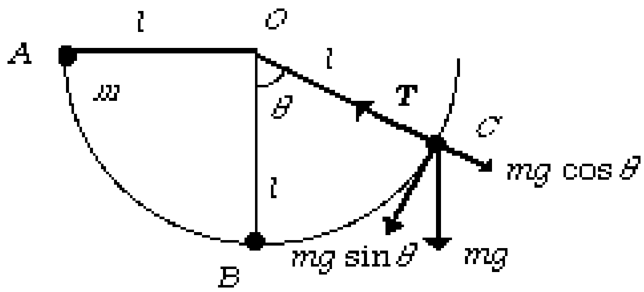
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}16\ \text{Hz}.$$

c) La massima accelerazione si ha quando la velocità è nulla, ovvero nei punti di inversione, dove $x = s$ e l'accelerazione vale

$$a = -\omega^2 s = -\frac{k}{m} s = -1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.37. Un pendolo semplice di massa m e lunghezza l viene lasciato cadere dalla posizione orizzontale A, sia B la posizione verticale; ricavare l'espressione della tensione del filo in funzione dell'angolo θ formato dal filo con la verticale e stabilire dove essa è massima.

(4)



———

In una generica posizione C la legge di Newton lungo la direzione del filo si scrive

$$T - m\,g\cos\theta = \frac{m v_C^2}{l},$$

ma, applicando il principio di conservazione dell'energia tra le posizioni C e B, dato che il pendolo in C ha acquistato energia cinetica a spese dell'energia potenziale diminuita da A a C della quantità $m\ g\ l\cos\theta$, risulta

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = m g l \cos\theta,$$
$$v_C^2 = 2 g l \cos\theta,$$

che, sostituita nella precedente equazione, fornisce

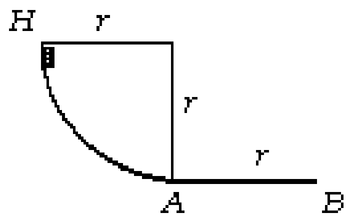
$$T = 3\ m\ g \cos\theta.$$

Il massimo valore di T si ha per $\cos\theta = 1$, cioè per $\theta = 0°$ cioè nella posizione B e vale

$$T = 3\ m\ g.$$

4.38. Un blocchetto di massa m = 1 kg è lasciato libero nel punto H di una guida liscia a forma di quarto di circonferenza di raggio r = 1 m; finita la parte circolare ha inizio un tratto orizzontale scabro con μ = 0,6. Se il blocco si ferma nel punto B a distanza r da A, calcolare: a) la velocità in A e b) il tempo di percorrenza del tratto AB.

(2)



a) Nel punto H il blocchetto possiede solo energia potenziale $m\ g\ r$, che al termine della discesa si trasforma in energia cinetica, quindi

$$v = \sqrt{2 g r} = \sqrt{19,6} = 4,4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nel tratto AB, scabro, il blocchetto sarà soggetto a una decelerazione di attrito $\mu\ g$, perciò, applicando una delle leggi di Galileo e tenendo conto che la velocità del blocchetto in B è nulla, si ha

$$v_B = v - \mu g t = 0$$

e quindi

$$t = \frac{v}{\mu g} = \frac{4,4}{0,6 \cdot 9,8} = 0,75 \text{ s}.$$

4.39. Una sferetta di massa m = 10 g comprime di un tratto x = 2 cm una molla ideale di rigidità k = 50 N/m lungo l'asse x. Togliendo il fermo, la molla si espande lanciando la sferetta su un piano orizzontale che, dalla posizione iniziale di quiete in poi, è scabro con μ = 0,2. Calcolare con quale velocità la

sferetta passa a distanza d = 10 cm dalla posizione iniziale. Qual è la condizione sotto la quale il problema ha soluzione ? **(2)**

L'energia potenziale elastica della molla compressa, una volta tolto il fermo, si trasforma in energia cinetica della sferetta che viene parzialmente impiegata per vincere le forze di attrito; applicando il principio di conservazione dell'energia, abbiamo:

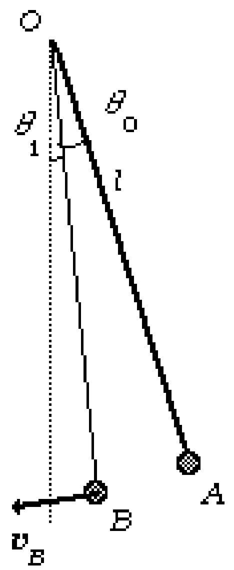
$$\frac{1}{2} k\, x^2 = \mu\; m\, g\, d + \frac{1}{2} m\, v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2\mu \;\; g\, d} = \sqrt{\frac{50}{10^{-2}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} - 0,4 \cdot 9,8 \cdot 10^{-1}} = 1,27 \; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Il problema ha in generale soluzione solo se

$$\frac{k}{m} x^2 - 2\,\mu \;\; g\, d > 0.$$

4.40. Un pendolo semplice di massa m = 100 g e di lunghezza l = 1 m oscilla tra –18° e +18° in un piano verticale. Calcolare: a) la velocità con cui passa il pendolo dalla posizione angolare θ_1 = 6° e b) la potenza istantanea in tale posizione. **(3)**



---

a) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia alle due posizioni A e B riferendo l'energia potenziale del pendolo alla quota O e tenendo conto che il pendolo in A è in quiete, mentre in B avrà velocità v_B:

$$-\, m\; g\; l \cos\theta_0 = -m\; g\; l \cos\theta_1 + \frac{1}{2} m\, v_B^2,$$

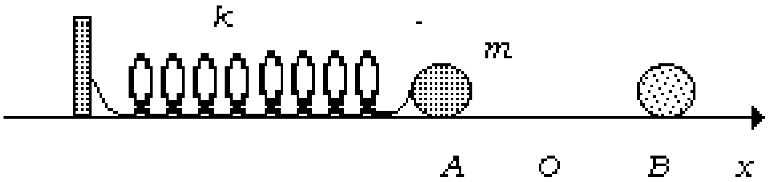
$$v_B = \sqrt{2\, g\, l(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)} = \sqrt{19,6(0,99452 - 0,95102)} = 0,92 \; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) La potenza istantanea è

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = m\, g \sin\theta_1\, v_B = 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}104 \cdot 0{,}92 = 0{,}09 \text{ W}.$$

4.41. Una molla ideale di rigidità k = 196 N/m è in quiete sull'asse x nella posizione A recando all'estremo libero una sferetta di massa m = 40 g. Se viene tirata verso destra fino alla posizione B di un tratto d = 2 cm e poi rilasciata, calcolare, trascurando gli attriti:
a) la frequenza delle oscillazioni,
b) l'energia potenziale nei punti di inversione,
c) la posizione di massima velocità,
d) il valore di tale massimo,
e) l'ampiezza delle oscillazioni,
f) la velocità nella posizione O, a metà strada tra A e B,
g) il tempo impiegato a spostarsi A a O,
h) l'energia meccanica totale nella posizione B,
i) il lavoro esterno necessario per l'allungamento della molla.
l) Quali delle precedenti risposte cambiano se si tiene conto degli attriti?

(5)



———

a) Trattandosi di un moto armonico semplice:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 11{,}1 \text{ Hz} .$$

b)

$$U = \frac{1}{2}\, k\, d^2 = 39 \text{ mJ} .$$

c) In un moto armonico la massima velocità si ha in corrispondenza del centro di oscillazione, ovvero in A.

d)

$$v = \omega\, d = d\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

e)

$$d = 2 \text{ cm}.$$

f) Applicando il principio di conservazione dell'energia tra le posizioni O e B e tenendo conto che in B l'energia cinetica è nulla, si ha:

$$\frac{1}{2}k\,d^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\,v_O^2\,,$$

e quindi

$$v_O = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}} = 1{,}21\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

g) L'intera oscillazione viene compiuta quando la sferetta, partita da A, ritorna in A. Scrivendo la legge oraria del moto nella forma $x = d \cos \omega t$ e ponendo $x = d/2$ nella posizione A, si ha

$$\frac{d}{2} = d\cos\omega t,$$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3},$$

$$t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} = 14{,}8\ \mathrm{ms}$$

h) È solo energia elastica e vale [vedi caso f)], 39 mJ.

i) 39 mJ.

l) In presenza di attriti, il moto è ancora armonico, ma smorzato, quindi cambia la frequenza delle oscillazioni, diminuisce esponenzialmente nel tempo la loro ampiezza, cambieranno quindi l'energia elastica e la velocità massima; le sole risposte che non cambiano sono la c) e la i).

4.42. Una particella di massa m = 20 g inizialmente in quiete nel punto A (1,2,3) m si sposta sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F} = (3\ \boldsymbol{i} + 10\ \boldsymbol{j} + 8\ \boldsymbol{k})$ N nel punto B (3,2,4) m. Calcolare: a) il tempo impiegato per andare da A a B, b) la potenza all'istante t = 5 s, c) la variazione di energia cinetica della particella.

(4)

———

a) Trattandosi di una forza costante, il moto della particella sarà uniformemente accelerato con accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{9 + 100 + 64}}{2 \cdot 10^{-2}} = 657{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Per ricavare il tempo impiegato è necessaria la velocità finale della particella, che possiamo ricavare dal teorema dell'energia cinetica:

$$L = K_f,$$

$$F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z = 3 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 14 \text{ J} = \frac{1}{2} m v_f^2,$$

da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{28}{2 \cdot 10^{-2}}} = 37,4 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ne deriva che il tempo impiegato sarà

$$t = \frac{v_f}{a} = \frac{37,4}{657,6} = 56,9 \text{ ms}.$$

b) La potenza è espressa dalla relazione $W = F\ v$, perciò, per calcolarla, dobbiamo ricavare la velocità all'istante t = 5 s; a tale scopo, avendo calcolato in a) l'accelerazione, sappiamo che $v = a\ t$, ovvero

$$v\ (t = 5 \text{ s}) = 659,7 \cdot 5 = 3298,5 \text{ m/s}$$

e quindi

$$W = 13,1 \cdot 3298,5 = 43,4 \text{ kW}.$$

c) Da quanto calcolato in a), la variazione di energia cinetica della particella è pari al lavoro compiuto dalla forza F, quindi vale 14 J.

4.43. Una molla ideale di rigidità k = 400 N/m, inizialmente scarica in un piano orizzontale, reca all'estremo libero una massa m = 40 g; se la molla viene allungata di s = 20 cm e poi rilasciata, calcolare: a) la potenza dell'oscillatore armonico all'istante $t = T/8$, dove T è il periodo di oscillazione; b) la potenza media in un periodo.

(5)

---

a) La potenza istantanea è espressa da

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = -\ k\ x\ v,$$

dove

$$x = s \cos \omega\ t,$$
$$v = -\ s\ \omega \sin \omega\ t.$$

Abbiamo allora

$$W = k\ s^2 \omega \sin \omega\ t \cos \omega\ t,$$

o anche

$$W = s^2 \sqrt{\frac{k^3}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\ t \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\ t.$$

Per $t = T/8$ abbiamo dunque

$$W = s^2 \sqrt{\frac{k^3}{m}} \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} = 4 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{(400)^3}{4 \cdot 10^{-2}}} \cdot \frac{1}{2} = 800 \text{ W}.$$

b) La potenza media in un periodo è data da

$$\overline{W} = \frac{\int W\, dt}{T} = \frac{\int k\, s^2 \omega \sin\omega\, t \cos\omega\, t\, dt}{T} = \frac{k\, s^2 \omega}{T} \int \sin\omega\, t \cos\omega\, t\, dt =$$

$$= \frac{k\, s^2\omega}{T\omega} \int_0^{2\pi} \sin\omega\, t \cos\omega\, t\, d(\omega\, t) = \frac{k\, s^2\omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} 2 \sin\omega\, t \cos\omega\, t\, d(2\omega\, t) =$$

$$= \frac{k\, s^2\omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\omega\, t \;\; d(2\omega\, t) = -\frac{k\, s^2\omega}{8\pi} \left[\cos 2\omega\, t\right]_0^{4\pi} = 0.$$

Era prevedibile questo risultato?

4.44. Quale lavoro dobbiamo compiere per sollevare verticalmente un corpo di massa m = 2 kg di un tratto d = 20 cm, a) con accelerazione a = 3 g, b) con velocità costante v = 3 m/s, c) e quale lavoro per riportarlo a terra ?

(4)

---

a) Se il corpo deve essere sollevato con accelerazione 3 g, si deve compiere su di esso una forza verso l'alto pari a 4 $m\, g$, e il lavoro necessario è 4 $m\, g\, d$, pari a 15,7 J.

b) Se il corpo deve essere sollevato con velocità costante, gli si deve applicare una forza verso l'alto superiore di una quantità infinitesima al peso $m\, g$ (se applichiamo una forza pari esattamente a mg, il corpo inizialmente in quiete, continuerà a restare in quiete per il principio d'inerzia), pertanto il minimo lavoro necessario sarà $m\, g\, d$ = 3,9 J.

c) Per riportare a terra il corpo si dovrà compiere lo stesso lavoro, in quanto perché il corpo possa scendere con velocità costante, lo si dovrà sostenere con una forza verso l'alto ancora pari a $m\, g$.

4.45. Un punto materiale di massa m = 20 g si muove lungo l'asse x con velocità

$$v = 2\ e^{-0{,}3\ t} \text{ (in unità SI).}$$

Calcolare: a) la distanza percorsa dopo 10 s dall'inizio del moto, b) il lavoro necessario per arrestare il punto, c) il tempo di arresto. **(3)**

---

a) Per ricavare la legge oraria del moto si deve integrare, ovvero

$$\frac{dx}{dt} = 2\,\mathrm{e}^{-0,3\,t},$$

$$x = \int 2\,\mathrm{e}^{-0,3\,t}dt = \frac{2}{-0,3}\int \mathrm{e}^{-0,3\,t}d(-0,3\,t) = -6,7\mathrm{e}^{-0,3\,t} + \text{costante}.$$

Per determinare la costante di integrazione, ricordiamo che per $t = 0, x$ vale x_0, ovvero

$$x_0 = -6,7 + \text{costante},$$

quindi

$$\text{costante} = x_0 + 6,7$$

e infine, per t=10 s:

$$x - x_0 = 6,7(1 - \mathrm{e}^{-3}) = 6,33 \text{ m}.$$

b) Il lavoro necessario sarà un lavoro resistente: per il teorema dell'energia cinetica, esso sarà dato da

$$L = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = -K_\mathrm{i} = -\frac{1}{2}m\,v_0^2 = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 4 = -40 \text{ mJ},$$

essendo la velocità iniziale pari a 2 m/s.

c) Il tempo di arresto è infinito, come risulta osservando la legge oraria della velocità.

4.46. Un sistema formato da una massa puntiforme m e da una molla ideale di rigidità k si trova in un piano verticale. Determinare il rapporto tra l'allungamento della molla in condizioni di equilibrio e quello massimo.

(3)

In condizioni di equilibrio l'allungamento della molla si ricava uguagliando la forza di Hooke alla forza peso, ovvero

$$x_\mathrm{eq} = \frac{m\,g}{k}.$$

L'allungamento massimo della molla si ricava invece imponendo che l'energia elastica immagazzinata nella molla sia stata ricavata a spese dell'energia potenziale persa dalla massa m, ovvero

$$\frac{1}{2}kx_\mathrm{o}^2 = m\,g\,x_\mathrm{o},$$

da cui

$$x_\mathrm{o} = \frac{2m\,g}{k}.$$

Ne consegue che

$$x_\mathrm{o} = 2\,x_\mathrm{eq}.$$

4.47. Una particella di massa $m = 20$ g è soggetta a una forza del tipo

$$\boldsymbol{F} = (t\,\boldsymbol{i} - 3\,t^3\boldsymbol{j})\ \text{N}.$$

a) Stabilire se la forza è conservativa e b) calcolare il lavoro da essa compiuto nell'intervallo 0–2 s.

(3)

---

a) Per stabilire se la forza è conservativa, si devono esplicitare le sue componenti in funzione delle coordinate x e y e solo allora verificare se sono soddisfatte le condizioni di Schwartz; sarebbe un grave errore eseguire le derivate parziali delle componenti espresse in funzione del tempo e concludere che esse sono entrambe nulle e che quindi la forza è conservativa. Abbiamo:

$$F_x = t\,,\ a_x = \frac{t}{m}\,,\ v_x = \frac{t^2}{2m}\,,\ x = \frac{t^3}{6m} \quad ,$$

$$F_y = -3\,t^3\,,\ a_y = -\frac{3\,t^3}{m}\,,\ v_y = -\frac{3\,t^4}{4m}\,,\ y = -\frac{3\,t^5}{20\,m} \quad .$$

Esplicitando t in funzione di y, sostituendolo in F_x e facendo la stessa cosa in F_y dopo aver esplicitato t in funzione di x, otteniamo

$$F_x = \left(-\frac{20}{3}m\,y\right)^{1/5},$$

$$F_y = -18\,m\,x \quad ,$$

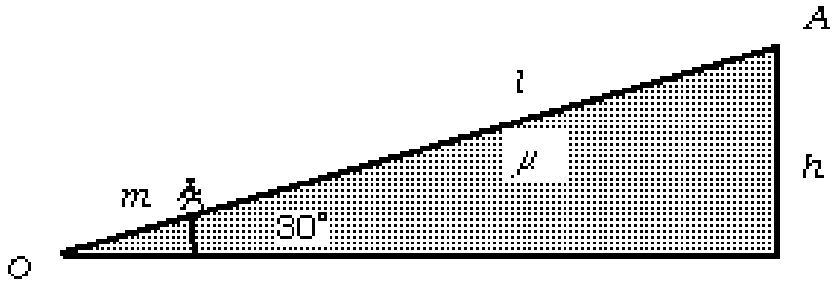
da cui è agevole verificare che, essendo differenti le due derivate in croce, la forza non è conservativa.

b) Trattandosi di una forza non conservativa, il lavoro dipende dal percorso, quindi dovremmo calcolare la posizione raggiunta dalla particella al termine dell'intervallo di 2 s, fissare un particolare percorso e integrare; tale calcolo, lungo e laborioso, può però essere evitato se applichiamo il teorema dell'energia cinetica; infatti otteniamo

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{8m}(t^4 + \frac{9}{4}t^8) = \frac{1}{0{,}16}(16 + \frac{9}{4}\cdot 256) = 3{,}7\ \text{kJ}.$$

4.48. Durante una corsa in salita un atleta di massa $m = 60$ kg supera un pendio rettilineo lungo $l = 50$ m inclinato di 30° sull'orizzontale con coefficiente di attrito $\mu = 0{,}4$. Calcolare: a) il lavoro compiuto dall'atleta per arrivare in quiete al termine del pendio, b) la massima velocità costante alla quale può correre utilizzando una potenza muscolare $W = 250$ W.

(3)



a) L'atleta deve compiere lavoro contro le forze di attrito e contro quelle di gravità, cioè possiamo scrivere che

$$L = -\mu m g l \cos 30° - m g h = -\mu m g l \cos 30° - m g \frac{l}{2} =$$

$$= -m g l (\mu \cos 30° + \frac{1}{2}) = -60 \cdot 9,8 \cdot 50 (0,4 \cdot 0,866 + 0,5) = -24,9 \text{ kJ}.$$

b) La potenza, che sarà negativa in quanto dissipata, si può esprimere come

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = -(\mu m g \cos 30° + m g \sin 30°)\, v,$$

e pertanto, in modulo:

$$v = \frac{W}{m g(\mu \cos 30° + \sin 30°} = \frac{250}{60 \cdot 9,8 \cdot 0,846} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,8 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

risultato ragionevole se si pensa che si tratta di corsa in salita con forte pendenza.

4.49. Calcolare il minimo lavoro muscolare che compie un discobolo per lanciare un disco di massa m = 1,6 kg da una quota trascurabile dal suolo a una distanza G = 65 m.

(2)

Il minimo lavoro sarà pari alla minima energia cinetica da imprimere al disco, ovvero alla minima velocità iniziale del disco; ricordando la formula che esprime la gittata

$$G = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

la minima velocità si ha per α = 45°, ovvero la minima energia cinetica sarà

$$L_{\min} = K = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m g G = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 9,8 \cdot 65 = 510 \text{ J}.$$

4.50. Una sferetta di massa m = 100 g comprime, bloccata da un fermo, di s= 2 cm una molla ideale di rigidità k = 50 N/m lungo l'asse x.Togliendo il fermo, la molla si espande lanciando la sferetta su un piano orizzontale scabro (μ = 0,2). Calcolare a) la distanza di arresto d, b) il tempo di arresto, c) la velocità a distanza $d/2$.

(4)

———

a) L'energia potenziale elastica della molla compressa viene spesa interamente per vincere le forze di attrito, quindi

$$d = \frac{k\,s^2}{2\,\mu\,m\,g} = \frac{50 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8} = 5{,}1 \text{ cm}.$$

b) La sferetta parte con energia cinetica iniziale pari all'energia elastica immagazzinata nella molla compressa:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,k\,s^2,$$

$$v_0 = s\sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{50}{0{,}1}} = 0{,}45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Applicando una delle leggi del moto uniformemente accelerato (essendo costante la decelerazione dovuta agli attriti) otteniamo:

$$0 = v_0 - \mu\,g\,t,$$

e quindi

$$t = \frac{v_0}{\mu\,g} = \frac{0{,}45}{1{,}96} = 0{,}23 \text{ s}.$$

c) Applicando una delle altre leggi del moto uniformemente accelerato, si ricava

$$v_f^2 = v_0^2 - 2\,\mu\,g\frac{d}{2} = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2},$$

$$v_f = 32\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

4.51. Una jeep di massa m = 1000 kg sale con velocità costante v = 8 m/s lungo un pendio rettilineo inclinato di 18° sull'orizzontale. Se il coefficiente di attrito tra gomme e terreno è μ = 0,7 calcolare la minima potenza che deve fornire il motore.

(3)

———

La potenza si può esprimere come il prodotto scalare della forza agente per la velocità; nel nostro caso le forze agenti, entrambe resistenti, sono la componente del peso della jeep lungo il piano inclinato e la forza di attrito, entrambe con verso opposto alla velocità di avanzamento della jeep, perciò:

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = -F\,v = -v(m\,g\sin\alpha + \mu\,m\,g\cos\alpha) = -\,m\,g\,v(\sin\alpha + \mu\ \cos\alpha) =$$
$$= -1000 \cdot 9{,}8 \cdot 8(0{,}31 + 0{,}7 \cdot 0{,}95) = -\,76{,}4\ \text{kW} = -104\ \text{CV}.$$

Il segno negativo indica che si tratta di una potenza dissipata per vincere le forze resistenti.

4.52. Due pesisti, uno di massa m_1 = 90 kg, l'altro di massa m_2 = 100 kg lanciano il peso rispettivamente a distanze d_1 = 20 m e d_2 = 22 m. Se gli angoli di alzo sono α = 45° e β = 60°, trascurando la resistenza dell'aria e ipotizzando che il lancio parta a livello del terreno, calcolare il rapporto tra le energie muscolari richieste ai due pesisti.

(3)

———

Il rapporto tra le energie muscolari è uguale a quello tra le energie cinetiche da conferire al peso lanciato, cioè

$$r = \frac{K_1}{K_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2},$$

dove v_1 e v_2 sono rispettivamente le velocità iniziali con le quali i due pesisti lanciano l'attrezzo.
Le due distanze d_1 e d_2 non sono altro che le gittate e possiamo scrivere

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\dfrac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}}{\dfrac{v_2^2\sin 2\beta}{g}} = \frac{v_1^2\sin 2\alpha}{v_2^2\sin 2\beta},$$

da cui

$$r = \frac{d_1\sin 2\beta}{d_2\sin 2\alpha} = \frac{20\sin 120°}{22\sin 90°} = \frac{10}{11}\sin 60° = 0{,}79.$$

Si noti che le masse dei due atleti sono dati ridondanti!

4.53. Una sfera di massa m = 1 kg si muove con equazioni parametriche

$$x = 3\,t + a,\ y = 2\,t^2 + b,\ \text{(in unità SI)}$$

con a e b costanti. Sapendo che per t = 1 s, essa passa dal punto (4,3) m, calcolare: a) i valori e le unità SI di a e di b, b) la potenza all'istante t' = 4 s, c) la velocità della sfera dopo 4 s. **(3)**

———

a) Sia a che b hanno le stesse unità di x e di y, cioè metri. Per quanto riguarda i loro valori, avremo

$$4 = 3 + a,\ a = 1\ \text{m},$$
$$3 = 2 + b,\ b = 1\ \text{m}.$$

b) Utilizziamo per la potenza l'espressione

$$W = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z =$$

dove

$$v_x = 3,\ v_y = 4\ t,\ a_x = 0,\ a_y = 4.$$

c)

$$\boldsymbol{v} = 3\,\boldsymbol{i} + 4\,t\,\boldsymbol{j} = 3\,\boldsymbol{i} + 16\,\boldsymbol{j},$$

$$v = \sqrt{9 + 256} = 16{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.54. Data la forza $\boldsymbol{F} = (a\,y^2\boldsymbol{i} + b\,x\,\boldsymbol{j})$, in unità SI, con $a = 2$ e $b = 3$ unità SI, calcolare: a) le unità di a e di b, b) il lavoro compiuto da $\boldsymbol{F}$ per spostare un corpo da (0,0) m a (3,2) m lungo un segmento rettilineo.

(3)

———

a) L'unità di a sarà N/m^2, mentre quella di b è N/m.

b) Premesso che la forza assegnata non è conservativa risultando diverse le derivate in croce, il lavoro dipenderà dal percorso ed è dato da

$$L = \int (F_x dx + F_y dy) = \int_0^3 a\,y^2 dx + \int_0^2 b\,x\,dy.$$

Per calcolare i due integrali, dobbiamo prima trovare la relazione tra x e y lungo il segmento di retta che collega i due punti dati; l'equazione della retta per tali punti è $y = 2\,x/3$; tenendone conto, si ha

$$L = \int_0^3 \frac{8}{9}\,x^2\,dx + \int_0^2 \frac{9}{2}\,y\,dy = 17\ \text{J}.$$

4.55. Una sferetta di massa $m = 20$ g percorre una circonferenza di raggio $r = 20$ cm con legge oraria $\theta = 3\,t^2$ rad, in unità SI. Calcolare, all'istante $t = 2$ s: a) l'accelerazione tangenziale, b) l'accelerazione centripeta, c) l'accelerazione totale, d) il lavoro compiuto nel primo giro sulla sferetta.

(3)

———

a) Dalla legge oraria si hanno subito due importanti informazioni: il moto è uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\gamma = 6$ rad/s^2 e la velocità angolare iniziale è nulla.
Ciò premesso, l'accelerazione tangenziale è sempre data da

$$a_t = \gamma r = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 \text{ m/s}^2.$$

b) L'accelerazione centripeta è

$$a_c = \omega^2 r = \gamma^2 t^2 r = 36 \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 28{,}8 \text{ m/s}^2.$$

c)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{1{,}44 + 829{,}4} = 28{,}8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

d) Possiamo applicare il teorema dell'energia cinetica tenendo conto che la velocità iniziale è nulla:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m \gamma^2 t^2 r^2$$

e il tempo impiegato a compiere il primo giro si ricava dalla legge oraria nella quale al posto di θ inseriamo 2π rad, ovvero $t^2 = 2\,\pi/3$. Concludendo, sarà

$$L = \frac{1}{2} m \gamma^2 t^2 r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 36 \cdot \frac{6{,}28}{3} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 0{,}12 \text{ J}.$$

4.56. Calcolare la minima potenza necessaria per sollevare una massa m =10 kg di un tratto verticale h = 3 m in t = 3 s.

(2)

Innanzi tutto chiariamo perché viene chiesta la minima potenza: dal momento che il testo non precisa se la massa alla quota h è ferma o animata da velocità, la potenza minima è quella corrispondente alla condizione di quiete.
In tal caso per sollevare la massa si deve compiere un lavoro pari all'aumento della sua energia potenziale $m\,g\,h$, quindi la potenza richiesta sarà

$$W = m\,g\,h\,/t = 294/3 = 91{,}3 \text{ W}.$$

4.57. Uno sciatore di massa m = 80 kg scende lungo un pendio rettilineo lungo l = 120 m inclinato sull'orizzontale di un angolo α = 30° con coefficiente di attrito μ = 0,1. Calcolare: a) la forza di attrito, b) l'accelerazione dello sciatore, c) la velocità a fine pendio, d) la distanza di arresto sul successivo tratto orizzontale con coefficiente di attrito μ'= 0,6, e) la durata dell'intero percorso, f) la potenza media dissipata lungo tutto il percorso.

(3)

---

a)

$$F_{att} = \mu\,m\,g \cos\alpha = 0{,}1 \cdot 80 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866 = 67{,}9 \text{ N}.$$

b) L'accelerazione con cui scende lo sciatore è la risultante di un'accelerazione dovuta alla componente della gravità lungo il piano e alla decelerazione di attrito, ovvero

$$a = g \sin \alpha - \mu\, g \cos \alpha = g\,(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 9{,}8\,(0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}866) =$$
$$= 4{,}05 \text{ m/s}^2.$$

c) Essendo il moto uniformemente accelerato, avremo

$$v = \sqrt{2\,a\,l} = \sqrt{2 \cdot 4{,}05 \cdot 120} = 31{,}2 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 112{,}2 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}\ .$$

d) Riapplicando la stessa legge al tratto orizzontale, otteniamo

$$d = \frac{v^2}{2\,\mu'\,g} = \frac{(31{,}2)^2}{2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}8} = 82{,}8 \text{ m.}$$

e) Il tempo richiesto è la somma di quello per percorrere il pendìo e di quello per il tratto orizzontale, cioè

$$t = t_p + t_0 = \frac{v}{a} + \frac{v}{\mu'\,g} = \frac{31{,}2}{4{,}05} + \frac{31{,}2}{0{,}6 \cdot 9{,}8} = 13 \text{ s.}$$

f) Si può rispondere in due modi diversi: calcolando la potenza media come prodotto scalare della forza per la velocità media nei due tratti e separando le forze motrici (il peso) da quelle resistenti (l'attrito) oppure, molto più rapidamente, tenendo conto che lo sciatore all'inizio della discesa possedeva energia potenziale in misura $m\ g\ h = m\ g\ l/2$ e che tale energia è stata interamente dissipata nel tempo t calcolato in e). Abbiamo allora:

$$W_m = \frac{m\,g\,l}{2\,t} = \frac{80 \cdot 9{,}8 \cdot 120}{26} = 3{,}6 \text{ kW.}$$

4.58. Una sferetta di acciaio di massa $m = 50$ g percorre con velocità costante $v = 10$ m/s una guida circolare liscia di raggio $r = 20$ cm posta in un piano orizzontale. a) Calcolare la potenza necessaria per mantenere in moto la sferetta. b) Se la sferetta viene arrestata in $\Delta t = 5$ s magnetizzando la guida, qual è stata la potenza media dissipata? c) e quale la forza frenante media applicata dal campo magnetico?

(3)

———

a) La sferetta durante il moto possiede solo energia cinetica $K = m\ v^2/2$; il tempo impiegato a percorrere un giro (il periodo) vale $T = 2\ \pi\ r/v$, perciò sarà

$$W = \frac{\frac{1}{2}\,m\,v^2}{\frac{2\pi\ r}{v}} = \frac{m\,v^3}{4\,\pi\,r} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3}{12{,}56 \cdot 0{,}2} = 19{,}9 \text{ W.}$$

b) Nel tempo Δt la sferetta perde tutta la propria energia cinetica, pertanto la potenza media dissipata vale

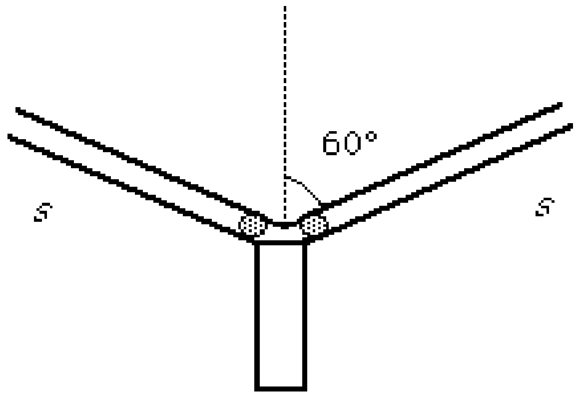
$$W_{\mathrm{m}} = \frac{m\,v^2}{2\Delta\,t} = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 10^2}{10} = 0{,}5\ \mathrm{W}.$$

c) La sferetta ha percorso il tratto di guida sotto l'azione del campo magnetico con velocità media $v/2$, perciò, essendo $W_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{m}}\,v_{\mathrm{m}}$, risulta

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{W_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{m}}} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\ \mathrm{N}.$$

4.59. Due identiche sferette di massa $m = 200$ g si trovano alla base dei due rami inclinati di $\alpha = 60°$ posti in rotazione con velocità angolare $\omega = 10$ rad/s da un motore di potenza $W = 40$ W. Se le pareti dei rami offrono un coefficiente di attrito $\mu = 0{,}8$ e la loro lunghezza è $s = 1$ m, calcolare: a) il tempo necessario per raggiungere le estremità superiori dei rami, b) il momento meccanico applicato dal motore.

(4)



———

a) Il lavoro del motore $W\,t$ viene utilizzato per aumentare l'energia potenziale delle sferette che si sollevano ciascuna di un tratto $s\cos 60°$, per conferire loro energia cinetica nel moto circolare di rotazione attorno all'asse, in misura

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}(\omega\,r)^2 = \frac{m}{2}(\omega\,s\sin 60°)^2$$

e per vincere le forze di attrito incontrate lungo i tubi; il lavoro di tali forze si può calcolare semplicemente per ciascuna sfera come

$$L_{\mathrm{att}} = F_{\mathrm{att}}\,s = \mu\,mg\sin 60°\ ;$$

sarà perciò

$$W\,t = m\left[(\omega\ s \sin 60°)^2 + 2g\ s\,(\mu\ \sin 60° + \cos 60°)\right],$$

$$t = \frac{m\left[(\omega\ s \sin 60°)^2 + 2g\ s\,(\mu\ \sin 60° + \cos 60°)\right]}{W} =$$

$$= \frac{0{,}2\,[75 + 19{,}6 \cdot 1{,}19]}{40} = 0{,}49\ \text{s}.$$

b) Nei moti rotatori vale la relazione

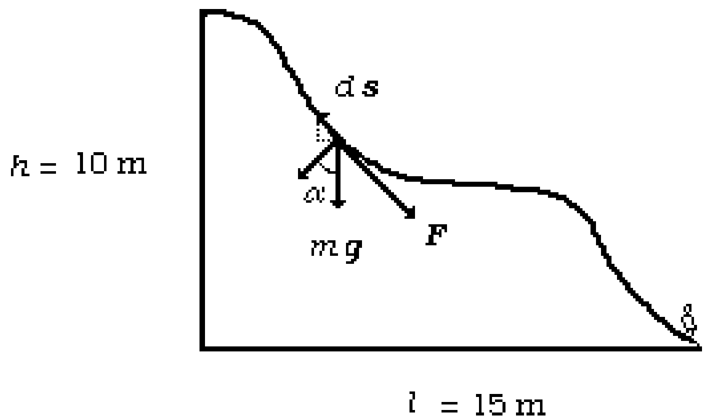
$$W = \boldsymbol{M}_O \times \boldsymbol{\omega},$$

per cui, trattandosi di moto assiale, nel quale $\boldsymbol{M}_O$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, risulta

$$M_O = \frac{W}{\omega} = 4\ \text{N m}\ .$$

4.60. Calcolare il lavoro che deve compiere un escursionista di massa m = 60 kg per salire lungo il pendìo scabro con coefficiente di attrito costante μ = 0,2 indicato in figura.

(5)



L'escursionista deve compiere lavoro sia contro la forza di gravità sia contro gli attriti che ostacolano la salita; il primo, essendo la forza peso conservativa, è dato da $m\ g\ h$; il secondo lo calcoliamo come integrale del lavoro elementare compiuto contro la forza di attrito $F = \mu\ m\ g\ \cos\alpha$; tale lavoro elementare è l'opposto di quello compiuto dalla forza di attrito, cioè è dato da

$$\delta L = -\ F\ ds \cos\pi = \mu\, m\, g \cos\alpha\ ds = \mu\, m\, g\ dl,$$

dove $dl = \cos\alpha\ ds$ è la componente orizzontale dello spostamento infinitesimo $\boldsymbol{ds}$. Il lavoro compiuto contro le forze di attrito è allora

$$L_{att} = \int \mu\ m\ g\ dl = \mu\ m\ g\ l.$$

Il lavoro totale da compiere per sollevare il corpo risulta quindi

$$L = m\,g\,(h + \mu\, l) = 60 \cdot 9{,}8\ (10 + 0{,}2 \cdot 15) = 7{,}64 \text{ kJ}.$$

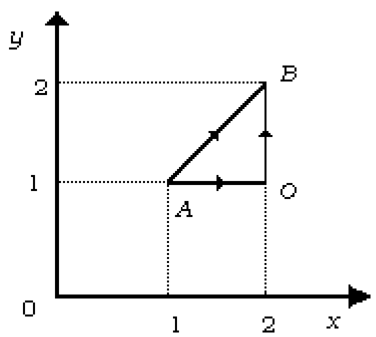
N.B. Osserviamo che il lavoro compiuto contro la forza di attrito dipende **soltanto** dalla lunghezza del tratto orizzontale, esattamente come quello compiuto contro la forza peso dipende soltanto dalla lunghezza del tratto verticale. La forza di attrito si comporta quindi in questo caso come una forza conservativa; ciò non deve stupire, pur se apparentemente in contrasto con quanto affermano i testi. Infatti, le conclusioni alle quali siamo giunti sono valide solo perché abbiamo implicitamente ipotizzato che il profilo sia contenuto nel piano della pagina. Se il sollevamento avviene nello spazio tridimensionale, i tratti perpendicolari al piano della pagina danno al lavoro un contributo che non dipende solo dalla lunghezza l, ma anche dall'effettivo spostamento in tale direzione. Allo stesso modo vanno le cose se il moto del corpo avviene in un piano orizzontale, dove il lavoro dipende dalla reale lunghezza del percorso.

4.61. Una forza ha nel piano (x, y) componenti

$$F_x = 2\,x\,y + y^2,\ F_y = 2\,x\,y + x^2 \text{ (unità SI)}.$$

Verificare che è conservativa e calcolare il lavoro compiuto per uno spostamento del punto di applicazione da A (1,1) m a B (2,2) m lungo i due percorsi indicati in figura.

(4)



———

Risulta

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2\,x + 2\,y, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2\,y + 2\,x,$$

pertanto la forza è conservativa.
Calcoliamo ora il lavoro lungo il segmento di retta AB, tenendo presente che lungo tale segmento è $y = x$:

$$L_{AB} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy) = \int_1^2 (2\,x\,y + y^2)\,dx + \int_1^2 (2\,x\,y + x^2)\,dy =$$

$$= \int_1^2 2\,x^2 dx + \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 2\,y^2 dy + \int_1^2 y^2 dy = \int_1^2 3\,x^2 dx + \int_1^2 3\,y^2 dy =$$

$$= \left[x^3\right]_1^2 + \left[y^3\right]_1^2 = 14 \text{ J}.$$

Calcoliamo ora il lavoro lungo il percorso *AOB*:

$$L_{AOB} = \int_A^O F_x dx + \int_A^O F_y dy + \int_O^B F_x dx + \int_O^B F_y dy = \int_A^O (2x\,y + y^2)\,dx + \int_O^B (2x\,y + x^2)\,dy =$$
$$= \int_A^O 2x\,y\,dx + \int_A^O y^2 dx + \int_O^B 2x\,y\,dy + \int_O^B x^2 dy = 1\left[x^2\right]_1^2 + 1\left[x\right]_1^2 + 2\left[y^2\right]_1^2 + 4\left[y\right]_1^2 =$$
$$= 3 + 1 + 6 + 4 = 14\ \text{J}.$$

Il fatto che i due lavori risultino uguali era prevedibile dalla natura conservativa della forza.

4.62. Una massa m = 400 g vincolata a una molla ideale di costante k = 10 N/m oscilla in un piano orizzontale liscio tra le due posizioni $A = -4$ m e $B = 4$ m. Calcolare: a) l'accelerazione della massa in B, b) l'energia meccanica totale del sistema.

(3)

———

a) Utilizzando la legge di Hooke, si ha

$$-k\,x_B = m\,a_B,$$

da cui

$$a_B = -\frac{k}{m}x_B = -\frac{10 \cdot 4}{0,4} = -100\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) L'energia meccanica si mantiene costante in tutti i punti della traiettoria, essendo la forza agente conservativa; in particolare, nei punti estremi si ha

$$E = \frac{k\,x^2}{2} = \frac{10 \cdot 16}{2} = 80\ \text{J}.$$