7 Meccanica relativa

(30 problemi, difficoltà 115, soglia 80)

Formulario

$\boldsymbol{v}_{\mathbf{A}}$	velocità assoluta
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$	velocità relativa
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$	velocità di trascinamento
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}$	accelerazione assoluta
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{R}}$	accelerazione relativa
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{T}}$	accelerazione di trascinamento
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$	accelerazione di Coriolis

Teorema di Galileo

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$$

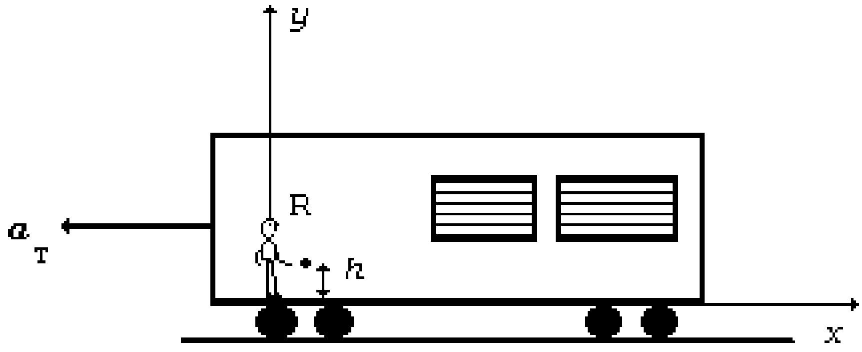
Teorema di Coriolis o delle accelerazioni relative

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} + 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$$

Problemi svolti

7.1. Un uomo a bordo di un treno lascia cadere una moneta mentre il treno sta accelerando con accelerazione a_{T} = 3 m/s^2. Se la moneta cade da un altezza h = 1,20 m dal pavimento, calcolare: a) a quale distanza dai piedi del viaggiatore R cadrà la moneta, b) qual è la traiettoria vista dall'uomo.

(3)



a) Il viaggiatore R è un osservatore relativo e per esso deve essere

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T.$$

Proiettando tale equazione vettoriale sui due assi x e y, si ha:

$$a_{Ry} = -g,$$
$$a_{Rx} = a_T.$$

Integrando due volte rispetto al tempo, otteniamo:

$$\begin{cases} y_R = -\dfrac{1}{2} g t^2 + h, \\ x_R = \dfrac{1}{2} a_T t^2. \end{cases}$$

Quando la moneta tocca il pavimento $y_R = 0$, perciò

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2,4}{9,8}} = 0,49 \text{ s},$$

che, sostituito nell'espressione di x_R, fornisce

$$x_R = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,24 = 0,36 \text{ m} = 36 \text{ cm},$$

in verso opposto a quello di moto del treno.

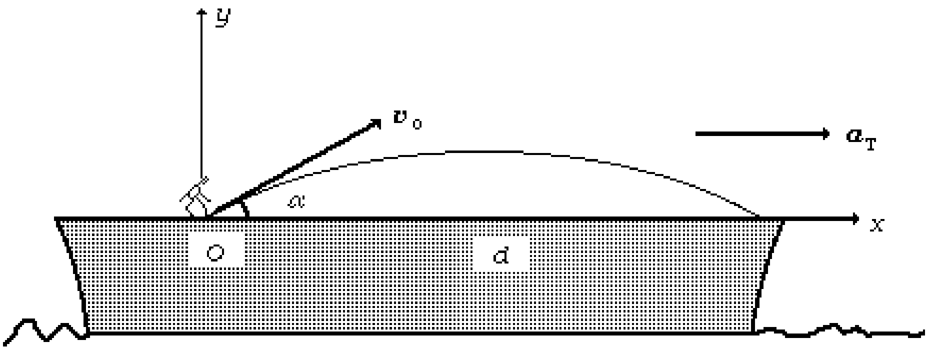
b) Ricavando t da x_R e sostituendolo in y_R, si ha:

$$y_R = -\frac{g}{a_T} x_R + h,$$

che è l'equazione di una retta orientata dalla mano di R verso il pavimento in verso opposto a quello di moto del treno.

7.2. Un uomo sta giocando a bocce sul ponte di una chiatta, lanciando una boccia con velocità iniziale v_0 = 10 m/s a un angolo α, nel tentativo di colpire con un tiro al volo una seconda boccia ferma a distanza d = 8 m da lui mentre la chiatta sta accelerando con accelerazione a_T = 2 m/s^2. Calcolare: a) per quale valore di α riuscirà a colpire la boccia, b) qual è il tempo di volo.

(4)



---

a) Assumiamo come sistema di riferimento una coppia di assi (x, y) solidali con la chiatta e con origine nel punto di lancio O. Il moto della boccia si può scomporre nelle direzioni x e y e le leggi orarie, in base al teorema delle accelerazioni, risultano

$$x_R = -\frac{1}{2} a_T t^2 + v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y_R = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha. \tag{2}$$

Per risolvere il problema non è necessario ricavare l'equazione della traiettoria, che richiede calcoli complessi. Basta solo tener presente che, quando la prima boccia colpisce la seconda, deve essere y_R = 0, quindi, dalla (2):

$$t_{\text{volo}} = \frac{2 v_o \sin\alpha}{g},$$

che, sostituito nella (1) con x_R = d, fornisce la seguente equazione nell'incognita α:

$$d = -\frac{1}{2} a_T \frac{4 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{v_0 \cos\alpha}{g} \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g},$$

dalla quale, dopo qualche passaggio, si ricava

$$(2 a_T v_0^2 + g^2 d) \tan^2\alpha - 2 v_0^2 \tan\alpha + g^2 d = 0,$$

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2 g \pm g\sqrt{v_0^4 - 2 a_T v_0^2 d - g^2 d^2}}{2 a_T v_0^2 + g^2 d}.$$

Passando ai calcoli

$$\tan\alpha = \frac{g}{2\,a_T v_0^2 + g^2 d}\left(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2\,a_T v_0^2 d - g^2 d^2}\right) =$$

$$= \frac{9{,}8}{400 + 768{,}32}\left(100 \pm 25{,}56\right) = \begin{cases} 1{,}0532 \\ 0{,}6246, \end{cases}$$

cui corrispondono per α i due valori

$$\begin{cases} \alpha_1 = 46°\,29' \\ \alpha_2 = 32°\,00'. \end{cases}$$

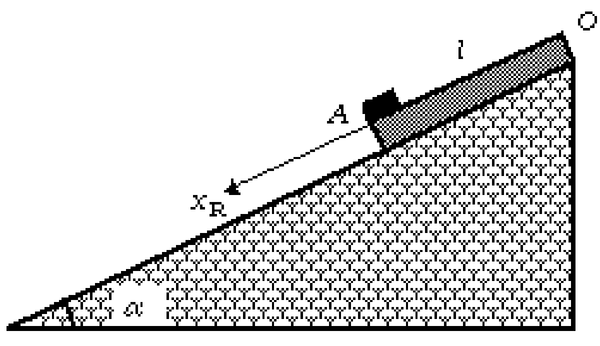
Il fatto che i due angoli non siano complementari non deve stupire: infatti due angoli di alzo complementari hanno la stessa gittata solo quando il moto orizzontale del grave è rettilineo uniforme, mentre in questo caso il moto è uniformemente accelerato con accelerazione a_T.

b) I corrispondenti tempi di volo sono

$$\begin{cases} t_1 = 1{,}48 \text{ s} \\ t_2 = 1{,}08 \text{ s}. \end{cases}$$

7.3. Su una lastra metallica di lunghezza l = 20 cm è appoggiato all'estremo A un blocchetto puntiforme che può scivolare su essa con un coefficiente di attrito μ = 0,4. Il tutto viene lasciato libero sulla cima di un piano liscio inclinato di α = 30°. Calcolare: a) dopo quanto tempo il blocchetto scivola giù dalla lastra, b) a quale distanza da O.

(3)



———

a) Per il teorema delle accelerazioni relative, l'accelerazione relativa del blocchetto è

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

dove $\boldsymbol{a}_A$ è dovuta agli attriti e vale $\mu\, g \cos\alpha$, mentre l'accelerazione di trascinamento $\boldsymbol{a}_T$ è il componente lungo il piano di $\boldsymbol{g}$, in modulo, $g \sin\alpha$.

Allora

$$a_R = \mu\, g \cos\alpha - g \sin\alpha..$$

La legge oraria del blocco sull'asse x_R solidale con la lastra orientato verso il basso è

$$x_R = \frac{1}{2} a_R t^2 = \frac{1}{2} g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\, t^2.$$

La lastra, a sua volta, scende con accelerazione g sin α, quindi la sua legge oraria è

$$x_L = \frac{1}{2} g \sin\alpha\; t^2.$$

Il blocchetto si staccherà dalla lastra quando la somma $x_R + x_L$ uguaglia la lunghezza l, cioè quando

$$l = \frac{1}{2} \mu\; g \cos\alpha\; t^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,l}{\mu\; g \cos\alpha}} = 0{,}34 \text{ s}.$$

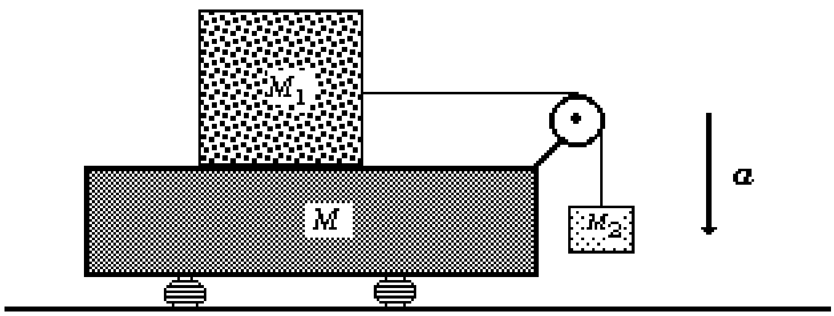
b) All'istante t la lastra ha percorso sul piano un tratto

$$d = \frac{1}{2} g \sin\alpha\; t^2 = \frac{l \tan\alpha}{\mu} = 29 \text{ cm}.$$

Il blocchetto cadrà quindi a distanza di 29 cm da O.

7.4. Quale forza orizzontale costante $\boldsymbol{F}$ si deve applicare al carrello di massa M per impedire alle due masse M_1 ed M_2 di muoversi rispetto a M? (Si trascuri ogni attrito e si consideri ideale il filo di collegamento tra le due masse.)

(4)



Consideriamo il carrello in quiete. Supponendo che M_2 trascini M_1 e detta $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione del sistema, indicando con $\boldsymbol{T}$ la tensione del filo, si ha

$$\begin{cases} M_2\, g - T = M_2\, a, \\ T = M_1\, a \end{cases}$$

da cui, sommando membro a membro:

$$a = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\, g.$$

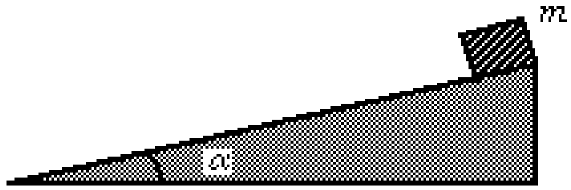
Per evitare lo scivolamento, si deve fare in modo che M_1 subisca un'accelerazione $-\boldsymbol{a}$ rispetto al piano di appoggio sul carrello, in modo che sia nulla l'accelerazione relativa $\boldsymbol{a}_R$ (= $\boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T$). Ciò si ottiene con un'accelerazione di trascinamento del carrello uguale in modulo ad a, ovvero applicando al carrello una forza

$$F = \frac{(M + M_1 + M_2)\, M_2\, g}{M_1 + M_2}$$

orientata nel verso positivo dell'asse x.

7.5. Un piano inclinato di un angolo α e un blocco di massa m hanno un coefficiente di attrito $\mu < \tan\,\alpha$. Stabilire di quale moto deve muoversi il piano perché il blocco non scivoli su di esso, precisando il valore dell'eventuale parametro cinematico costante.

(3)



La condizione $\mu < \tan\,\alpha$ assicura la discesa del blocco con accelerazione

$$a = g\,(\sin\,\alpha - \mu\cos\,\alpha),$$

la cui componente orizzontale vale

$$a_{or} = a\cos\,\alpha = g\cos\,\alpha\,(\sin\,\alpha - \mu\cos\,\alpha).$$

Se muoviamo il piano verso sinistra con accelerazione $a_T = a_{or}$, l'accelerazione del blocco relativa al piano diventa

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

e, in modulo:

$$a_R = a_{or} - a_T = 0,$$

quindi il blocco non scivola se il piano viene messo in moto con accelerazione a_{or} verso sinistra.

7.6. Il pavimento di un ascensore può sopportare un peso massimo di 4 kN. Stabilire di quale moto e in quale verso deve muoversi l'ascensore perché il pavimento non ceda pur caricato da 6 persone di massa complessiva m = 450 kg. **(3)**

La massa delle 6 persone corrisponde a un peso complessivo P = 4,41 kN. L'ascensore deve quindi muoversi in modo che il peso apparente agente sul pavimento sia inferiore a quello reale. Dal teorema delle accelerazioni relative abbiamo

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

$$m\,\boldsymbol{a}_R = m\,\boldsymbol{a}_A - m\,\boldsymbol{a}_T.$$

Deve quindi essere

$$m a_R < 4000 \text{ N},$$

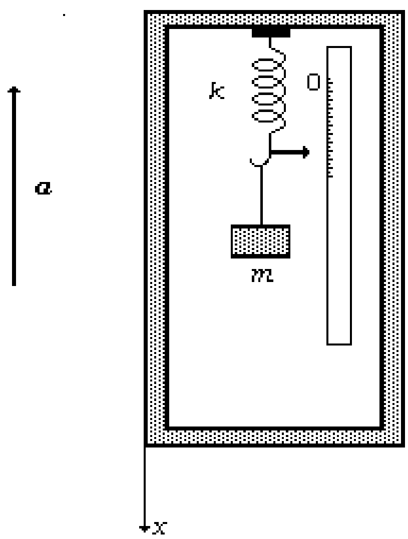
perciò

$$m a_A - m a_T < 4000 \text{ N},$$

$$4410 - m a_T < 4000,$$

$$a_T > \frac{410}{450} = 0{,}91 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ verso il basso}$$

7.7. Al soffitto di un ascensore fermo al piano terra è appeso un dinamometro ideale di rigidità k = 196 N/m recante appesa all'estremo libero una massa m e risultando allungato di d = 4 cm. Se l'ascensore accelera verso l'alto con a = 2 m/s^2, calcolare: a) la massa m, b) il peso apparente durante il moto, c) la massa apparente. **(3)**



a) Scrivendo le condizioni di equilibrio:

$$k\,d = m\,g,$$

$$m = \frac{k\,d}{g} = \frac{196 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{9,8} = 0,8 \text{ kg} = 800 \text{ g}.$$

b) Le condizioni di equilibrio relativo richiedono che sia

$$a_R = a_A - a_T = 0,$$

ovvero, proiettando tale equazione su un asse x orientato verso il basso:

$$m\,g - k\,x' + m\,a = 0,$$

dove x' è la nuova deformazione della molla del dinamometro quando l'ascensore sta accelerando con accelerazione a.

Si ottiene dunque

$$x' = \frac{m}{k}(a + g) = 4,82 \cdot 10^{-2}\text{m} = 4,82 \text{ cm}.$$

Il nuovo peso sarà

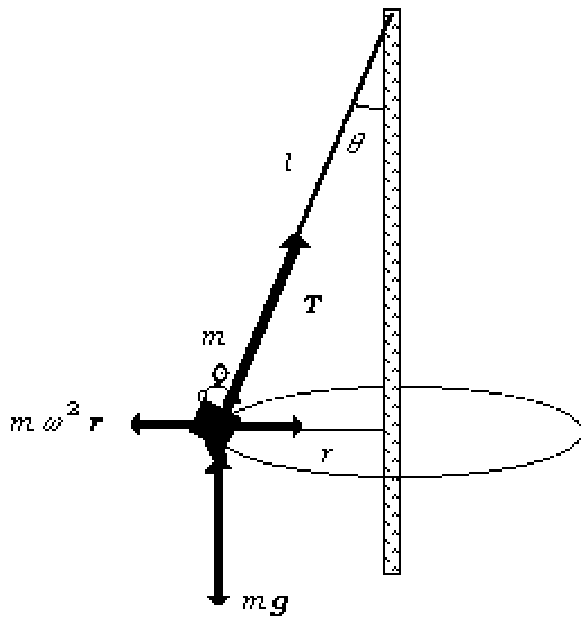
$$p' = p\frac{x'}{x} = m\,g\frac{a+g}{g} = m(a+g) = 9,44 \text{ N}.$$

c) La massa dell'oggetto non varia, tuttavia il passeggero a bordo, non sapendo di essere in moto accelerato, ricava la massa come

$$m' = \frac{p'}{g} = \frac{9,44}{9,8} = 0,963 \text{ kg} = 963 \text{ g}.$$

7.8. Una giostra è formata da una catena di lunghezza l = 6 m e massa trascurabile al cui estremo libero è fissato un seggiolino sul quale è seduto un bambino. La massa complessiva del seggiolino e del bambino è m = 50 kg. Il tutto viene posto in rotazione attorno all'asse verticale con velocità angolare costante e in tali condizioni è $\theta = 30°$.
Calcolare: a) la velocità angolare della giostra, b) la tensione della catena, c) la forza di trascinamento, d) la forza di Coriolis agente sul bambino.

(4)



a) Il bambino, osservatore relativo, è in equilibrio relativo, in quanto in quiete rispetto alla terna mobile solidale con il seggiolino; per esso, quindi, deve essere nullo il risultante di tutte le forze agenti, che sono la tensione della catena, il peso e la forza apparente centrifuga di trascinamento, orientata verso l'esterno della traiettoria circolare del seggiolino. Deve allora essere:

$$\tan\theta = \frac{m\,\omega^2 r}{m\,g} = \frac{\omega^2 l \sin\theta}{g},$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} = \sqrt{\frac{9,8}{6\cdot 0,866}} = 1,37\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) Deve anche essere

$$m\,g = T\cos\theta,$$

$$T = \frac{m\,g}{\cos\theta} = \frac{50\cdot 9,8}{0,866} = 565,8\ \text{N}.$$

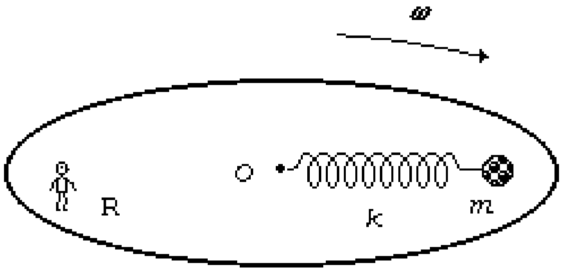
c) La forza di trascinamento vale

$$F_{\mathrm{T}} = m\,\omega^2\, l\sin\theta = 50\cdot 1,89\cdot 6\cdot 0,5 = 283,5\ \text{N}.$$

d) Non essendo il bambino in moto rispetto alla terna solidale con il seggiolino, la sua velocità relativa è nulla, e tale è anche la forza di Coriolis.

N.B. Ovviamente anche un osservatore assoluto, solidale con il terreno, deve giungere alle stesse conclusioni per giustificare il moto del bambino. Per tale osservatore il bambino descrive una traiettoria circolare ed è quindi necessariamente soggetto a una forza centripeta, ovvero il risultante del peso e della tensione.

7.9. Una molla ideale di rigidità k = 50 N/m e lunghezza a riposo l = 20 cm è appoggiata su una piattaforma scabra (μ = 0,2) in quiete in un piano orizzontale. La molla è fissata al centro della piattaforma, mentre all'estremo libero è vincolata una sferetta di massa m = 20 g. Se la piattaforma inizia a ruotare con velocità angolare ω = 10 rad/s, calcolare il nuovo allungamento della molla nelle condizioni di equilibrio. **(5)**



Si tratta di un caso di equilibrio relativo, visto cioè dall'osservatore R solidale con la piattaforma. Dovrà essere

$$m\,a_R = m\,a_A - m\,a_T = 0,$$

cioè

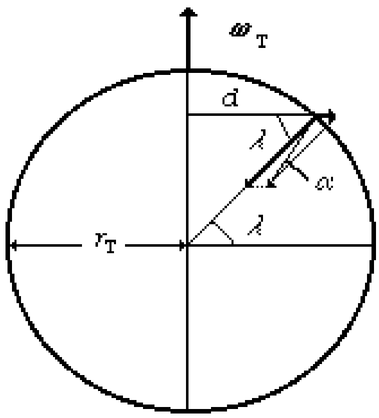
$$m\,a_A = m\,a_T.$$

Le forze effettivamente agenti sulla sferetta sono la forza elastica di richiamo della molla, $k\,x$, e la forza di attrito $\mu\,m\,g$, entrambe centripete, mentre la forza apparente di trascinamento $m\,a_T$ vale $m\omega^2(l + x)$, dove x è l'allungamento della molla. Allora

$$k\,x + \mu\;m\;g = m\,\omega^2(l + x),$$

$$x = \frac{m(\omega^2\;l - \mu\;g)}{k - m\,\omega^2} = \frac{2\cdot 10^{-2}(100\cdot 0{,}2 - 0{,}2\cdot 9{,}8)}{50 - 2\cdot 10^{-2}\cdot 10^2} = 7{,}52\cdot 10^{-3}\,\text{m} =$$
$$= 7{,}52\;\text{mm}.$$

7.10. Calcolare di quale angolo devia rispetto alla verticale un filo a piombo a Bologna (λ = 45° Lat) per effetto della rotazione terrestre (raggio terrestre r_T = 6,36 $\cdot\,10^6$ m, velocità angolare terrestre ω_T = 7,29 $\cdot$ 10^{-5} rad/s). **(5)**



La massa del filo a piombo è sottoposta alla forza assoluta $m\,g$ e alla forza centrifuga apparente $m\omega_T^2 d = m\omega_T^2 r_T \cos\lambda$. Indicando con α l'angolo cercato, applicando il teorema di Carnot e quello dei seni, abbiamo

$$\frac{g}{\omega_T^2 r_T \cos\lambda} = \frac{\sin(\pi-\alpha-\lambda)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\sin\alpha},$$

$$g\sin\alpha = \omega_T^2 r_T \cos\lambda(\sin\alpha\cos\lambda + \sin\lambda\cos\alpha) =$$

$$= \omega_T^2 r_T \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha) = \frac{\omega_T^2 r_T}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha),$$

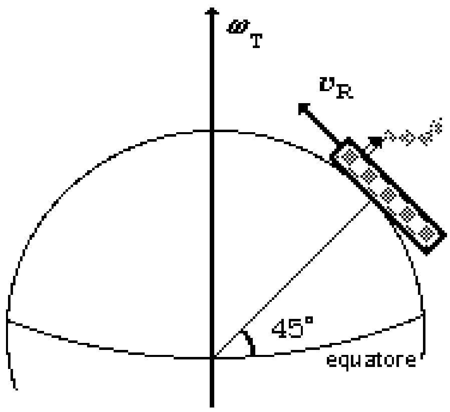
$$2g\sin\alpha = \omega_T^2 r_T \sin\alpha + \omega_T^2 r_T \cos\alpha,$$

$$\sin\alpha(2g - \omega_T^2 r_T) = \omega_T^2 r_T \cos\alpha,$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega_T^2 r_T}{2g - \omega_T^2 r_T} = 0{,}00173,$$

$$\alpha = 5°40'.$$

7.11. Una locomotiva di massa m = 184 t si muove lungo un meridiano alla latitudine di 45° con velocità v_R = 20 m/s. Calcolare la componente orizzontale della forza con cui la locomotiva agisce sui binari. **(4)**



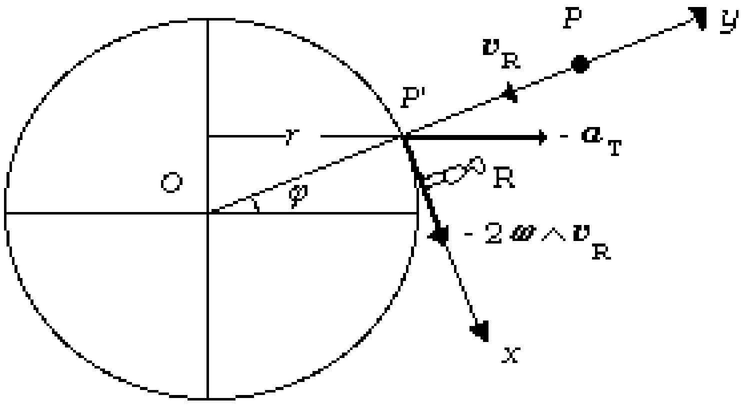
Né il peso né la forza centrifuga di trascinamento hanno componenti agenti sui binari perpendicolarmente al piano della figura; l'unica forza agente è quella di Coriolis che per definizione è perpendicolare sia al vettore velocità angolare terrestre sia alla velocità con cui la locomotiva procede lungo un meridiano. Il modulo di tale forza sarà

$$F_C = 2m\,\omega_T v \sin 45° = 2\cdot 1{,}84\cdot 10^5 \cdot 7{,}29\cdot 10^{-5}\cdot 20\cdot 0{,}707 = 378{,}3 \text{ N}.$$

Il verso, applicando la regola della mano destra sul prodotto vettoriale, risulta entrante nel piano della pagina.

7.12. Un grave viene lasciato cadere liberamente da una quota h = 100 m alla latitudine φ. Se la velocità angolare di rotazione terrestre è $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s e il raggio terrestre è $r_T = 6{,}36 \cdot 10^6$ m, ricavare l'espressione della deviazione di tale grave dalla verticale quando toccherà terra per effetto delle forze apparenti originate dal moto di rotazione terrestre. Calcolare quindi l'entità della deviazione a 45°, a 0° e a 90°.

(6)



Sia P il grave in caduta; l'osservatore terrestre R lo vedrà soggetto a un'accelerazione relativa

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_R, \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{a}_A$ coincide con l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$, $-\boldsymbol{a}_T$ è un'accelerazione centrifuga di modulo $\omega^2 r = \omega^2 r_T \cos\varphi$ e $-2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_R$ è un vettore verso est perpendicolare a PO di modulo

$$2\omega\, v_R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2\,\omega\, v_R \cos\varphi.$$

Assumiamo una coppia di assi (x, y) con origine nel punto $P\,'$ in cui la verticale per P incontra la superficie terrestre; proiettando la (1) sui due assi, si ottiene

$$\begin{cases} a_{Rx} = \omega^2 r_T \sin\varphi\cos\varphi + 2\omega\, v_R \cos\varphi, \\ a_{Ry} = -g + \omega^2 r_T \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Ma $v_R = g\,t$, mentre $\omega^2 r_T \cos^2\varphi$ è trascurabile rispetto a g, perciò il precedente sistema si riduce a

$$\begin{cases} a_{Rx} = \omega^2 r_T \sin\varphi\cos\varphi + 2\omega\, gt\cos\varphi, \\ a_{Ry} = -g. \end{cases}$$

Integrando due volte rispetto al tempo otteniamo le seguenti equazioni parametriche del moto:

$$\begin{cases} x_R = \omega^2 r_T \sin\varphi\cos\varphi\,\dfrac{t^2}{2} + 2\omega\, g\cos\varphi\,\dfrac{t^3}{3}, \\ \\ y_R = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + h. \end{cases}$$

Nell'istante in cui il grave tocca terra $y_R = 0$ e $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, che, sostituito nell'espressione di x_R, fornisce

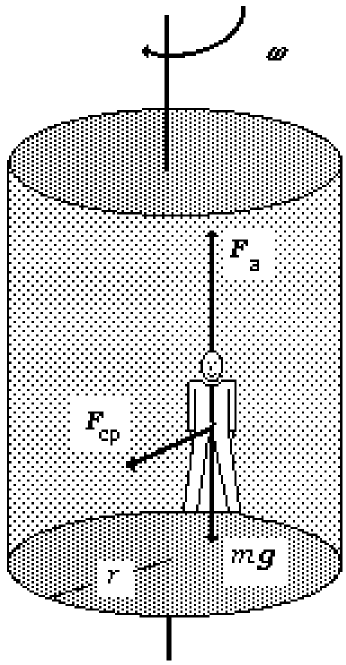
$$x_R = \frac{h}{g}\omega^2 r_T \sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}\omega\, g\cos\varphi\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} =$$

$$= h\,\omega\cos\varphi\left(\frac{\omega\, r_T \sin\varphi}{g} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right).$$

Sostituendo i valori numerici, si trova, dopo brevi calcoli:

$$x_R(45°) = 18,6 \text{ cm},$$
$$x_R(0°) = 2,2 \text{ cm},$$
$$x_R(90°) = 0.$$

7.13. In molti luna-park si trova un'interessante attrazione per il pubblico chiamata *rotor*. Si tratta di una stanza cilindrica le cui pareti sono rivestite internamente di un tessuto molto scabro. Una persona entra nella stanza e si appoggia alla parete con le spalle al muro: la stanza viene ora posta in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare ω via via crescente. Raggiunto un certo valore di ω, si spalanca il pavimento, ma l'uomo non cade.



Noti il raggio della stanza (r = 2,5 m) e il coefficiente di attrito tra le pareti e l'uomo (μ = 0,6), calcolare la minima velocità angolare alla quale deve ruotare la stanza perché l'uomo non cada. **(4)**

———

L'uomo, allorché la stanza entra in rotazione, dal momento che descrive una traiettoria circolare è sottoposto a una forza centripeta, ma, essendo un osservatore relativo, egli si sentirà soggetto a una forza di trascinamento centrifuga che lo schiaccia contro la parete. La forza di attrito vale in modulo

$$\mu F_{cp} = \mu m \omega^2 r$$

ed è orientata verso l'alto, opposta al peso $m g$.
La condizione richiesta per evitare la caduta è che la forza di attrito superi il peso, cioè

$$\mu m \omega^2 r > m g,$$

da cui

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{\mu r}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,6 \cdot 2,5}} = 2,56 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

corrispondente a una frequenza di$24,4$ giri / min.

7.14. Se la velocità angolare della Terra nel suo moto di rotazione diurno fosse ω =10^{-3} rad/s anziché gli attuali ω_T = 7,29 $\cdot 10^{-5}$ rad/s, a) quanto peserebbe all'equatore una persona di massa m = 80 kg? Con quale velocità angolare dovrebbe ruotare la Terra perché tale persona possa schizzar via lungo la linea equatoriale? **(3)**

———

a) Una persona sulla superficie terrestre è sottoposta secondo il teorema delle accelerazioni relative a una forza (peso) apparente

$$m a_R = P = m g - m \omega^2 r_T,$$

dove r_T = 6,36 $\cdot$ 10^6 m. Eseguendo i calcoli, risulta:

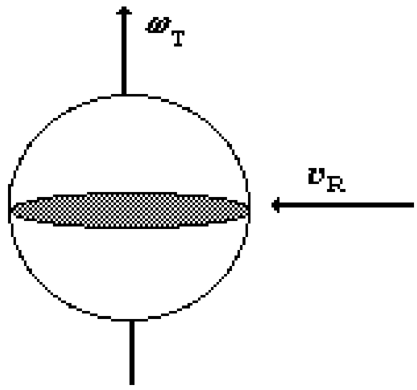
$$P = 80\,(9,81 - 10^{-6} \cdot 6,36 \cdot 10^6) = 276 \ \text{N}.$$

b) Perché un corpo possa sfuggire all'attrazione terrestre, la forza centrifuga di trascinamento dovrebbe superare $m g$, cioè dovrebbe essere, indicando con ω_f la velocità angolare di fuga:

$$m \omega_f^2 r_T > m g,$$

$$\omega_T > \sqrt{\frac{g}{r_T}} = \sqrt{\frac{9,81}{6,36 \cdot 10^6}} = 1,24 \cdot 10^{-3} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

7.15. Un oggetto cade liberamente da una quota h = 300 m in corrispondenza alla linea equatoriale. Qual è l'accelerazione di Coriolis agente su tale oggetto in corrispondenza del suolo? **(3)**



Essendo in caduta libera, la velocità dell'oggetto al suolo è data da

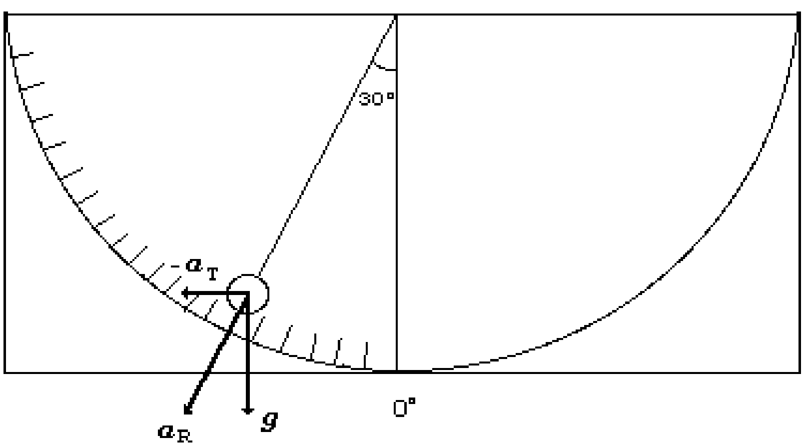
$$v_R = \sqrt{2 g h},$$

ed, essendo $\boldsymbol{v}_R$ perpendicolare alla velocità angolare terrestre, sarà

$$a_C = 2\,\omega_T\, v_R = 2\omega_T \sqrt{2 g h} = 2 \cdot 7{,}29 \cdot 10^{-5} \sqrt{19{,}6 \cdot 300} =$$
$$= 1{,}12 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1{,}12\ \ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\,.$$

Tale vettore ha direzione perpendicolare e verso entrante nel piano della pagina.

7.16. Al soffitto di un'auto è fissato un pendolino il cui piano di oscillazione è parallelo alla linea di marcia dell'auto. Il pendolino è sovrapposto a una tavoletta sulla quale è incisa una scala graduata in gradi. Se l'auto si muove con velocità costante, il pendolino si mantiene perfettamente verticale, ma quando l'auto accelera o frena il pendolino si sposta in verso opposto a quello dell'accelerazione. Calcolare l'accelerazione dell'auto se il pendolino è inclinato all'indietro di α= 30°. **(4)**



———

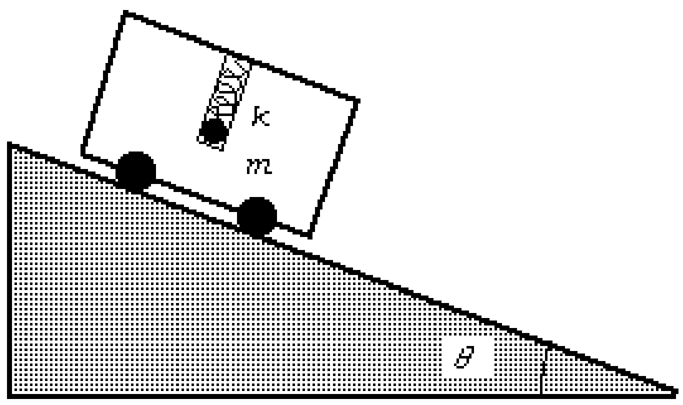
Il guidatore dell'auto è un osservatore relativo e come tale attribuisce al pendolo un'accelerazione relativa

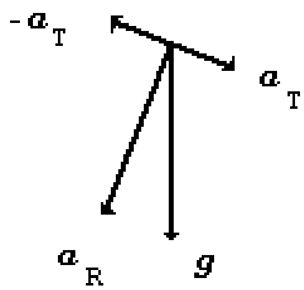
$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

dove $\boldsymbol{a}_A$ coincide con l'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$, mentre $\boldsymbol{a}_T$ è l'accelerazione di trascinamento, che in questo caso è l'accelerazione dell'auto. Il fatto che il pendolo mantenga inclinazione costante indica che $\boldsymbol{a}_R$ deve essere diretta lungo il filo del pendolo (infatti qualunque componente tangenziale di tale accelerazione produrrebbe un cambiamento di inclinazione del filo).
Dalla figura è facile vedere che

$$a_T = g \tan 30° = 9{,}8 \cdot 0{,}577 = 5{,}66 \text{ m/s}^2.$$

7.17. Un corpo di massa m è appeso a un dinamometro fissato al soffitto di un carrello che scende liberamente lungo un piano inclinato che forma con l'orizzontale un angolo θ. Ricavare in funzione dei parametri assegnati quale peso leggerà il dinamometro. **(4)**





———

Un osservatore a bordo del carrello attribuisce alla massa m un'accelerazione

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

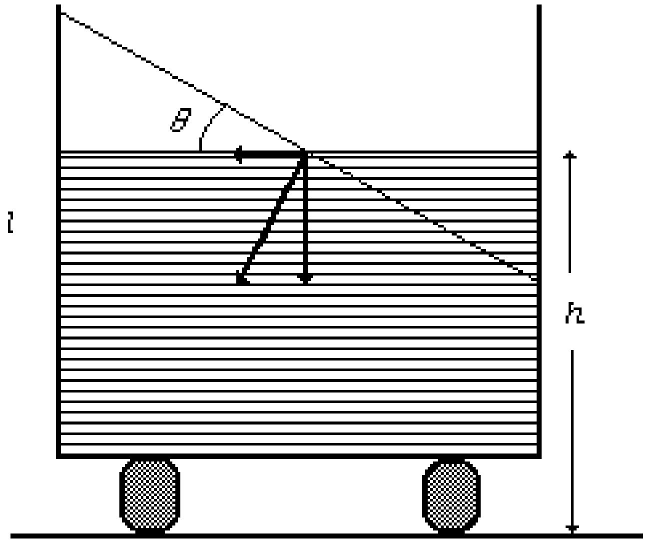
dove

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{g} \text{ e } a_T = g \sin \theta.$$

Dalla figura risulta perciò $a_R = g \cos\theta$ e il dinamometro misurerà un peso $m\, g \cos\theta$. In particolare, si osservino i due casi limite $\theta = 0°$ e $\theta = \pi/2$, in corrispondenza dei quali il peso è rispettivamente $m\, g$ con il carrello che resta in quiete e zero con il carrello in caduta libera.

7.18. Un autocarro trasporta un serbatoio cubico di lato l = 2 m pieno d'acqua fino a quota h = 1,8 m. Se l'autocarro affronta a velocità costante una curva di raggio r = 15 m, stabilire qual è il massimo valore di velocità perché l'acqua non fuoriesca dal serbatoio. Se l'acqua dovesse defluire cadrebbe verso l'interno o verso l'esterno della curva?

(4)



In curva l'autocarro è soggetto a una forza centripeta, quindi il liquido è soggetto a un'accelerazione centripeta v^2/r.
Per un osservatore solidale con l'autocarro dovrà quindi essere

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{g} - \omega^2 \boldsymbol{r}.$$

La superficie libera del liquido, dovendo essere in condizioni di equilibrio relativo, si disporrà perpendicolarmente al vettore $\boldsymbol{a}_R$ e la condizione limite perché l'acqua non trabocchi è

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{v^2}{rg} = \frac{l-h}{l/2},$$

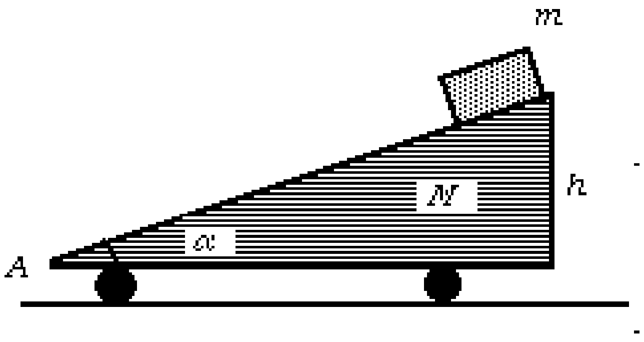
da cui

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2rg(l-h)}{l}} = 5,4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19,5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

L'acqua fuoriesce verso l'esterno della curva, perché nel moto relativo la forza centripeta si manifesta come centrifuga.

7.19. Un blocco di massa m viene lasciato libero dalla cima di un cuneo liscio di massa M mobile su rotelle con attrito trascurabile e inizialmente fermo. Noti h e α, ricavare l'espressione della velocità con cui il blocco raggiunge il punto A e della velocità del cuneo nello stesso istante.

(3)



Devono valere sia il principio di conservazione della quantità di moto totale sia quello dell'energia totale, ovvero, se V è la velocità del cuneo e v quella del blocco in A:

$$\begin{cases} m\,g\,h = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 + \dfrac{1}{2}\,M\,V^2 \\ m\,v\cos\alpha + M\,V = 0\,, \end{cases}$$

da cui

$$V = \frac{m\cos\alpha}{M}\sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\dfrac{m}{M}\cos^2\alpha}}\,,$$

$$v = -\sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\dfrac{m}{M}\cos^2\alpha}}\,.$$

7.20. Una molla ideale di rigidità k = 2 N/m reca appeso un piattello di massa trascurabile sul quale è appoggiato un disco di massa m = 20 g; il tutto è inizialmente in equilibrio con la molla allungata di un tratto x_o. Se si allunga la molla di un ulteriore tratto x_o e la si lascia poi libera di oscillare: a) determinare in quale posizione il disco si stacca dal piattello e sotto quali condizioni, b) calcolare x_o, c) calcolare a quale altezza dalla posizione iniziale di equilibrio arriverà il disco.

(5)

a) Il disco potrà staccarsi dal piattello durante la risalita ed esattamente nel punto in cui l'accelerazione del piattello è nulla, ovvero in corrispondenza alla posizione iniziale di equilibrio; l'accelerazione relativa del disco deve essere maggiore di zero e, dal momento che

$$a_R = a_A - a_T = g - \omega^2 x,$$

con a_R orientata verso l'alto, cioè negativa, deve essere

$$x > \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{\frac{k}{m}} = \frac{m\,g}{k} = x_o = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8}{2} = 9{,}8 \text{ cm} .$$

b) x_o = 9,8 cm.

c) Applichiamo il principio di conservazione dell'energia assumendo come zero la posizione a molla scarica; partendo dalla posizione più bassa raggiunta dal piattello, in tale posizione abbiamo l'energia potenziale elastica della molla deformata di $2x_o$ e l'energia potenziale di gravità del disco, mentre nella posizione iniziale di equilibrio la molla sarà deformata solo di x_o e il disco possiede energia potenziale $-m\,g\,x_o$ ed energia cinetica $m\,v^2/2$. Sarà allora

$$\frac{1}{2}\,k\,(4\,x_o^2) - 2\;m\,g\,x_o = \frac{1}{2}\,k\,x_o^2 - m\,g\,x_o + \frac{1}{2}\,m\,v^2 ,$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{m^2 g^2}{k} .$$

Tale energia cinetica si annulla nell'istante in cui il disco si è sollevato di una quota h al di sopra della posizione in cui si stacca, ovvero per

$$h = \frac{v^2}{2\,g} = \frac{m\,g}{2\,k} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}8}{4} = 4{,}9 \text{ cm} .$$

7.21. Un pendolo semplice viene montato su un carrello che scivola senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α = 30° sull'orizzontale. Se tale pendolo, oscillando da fermo, ha un periodo T_o = 2 s, a) quale sarà il periodo quando oscilla sul carrello? b) e quale se il piano presenta un coefficiente di attrito μ = 0,3 ?

(4)

---

a) Nella formula del periodo del pendolo semplice di Galileo dobbiamo sostituire all'accelerazione di gravità g l'accelerazione relativa

$$a_R = a_A - a_T = g - g\,\sin\alpha,$$

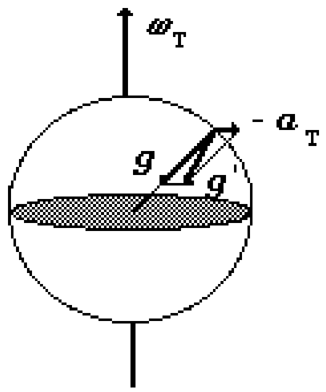
perciò

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g\,(1-\sin\alpha)}} = \frac{T_o}{\sqrt{(1-\sin\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{0{,}5}} = 2{,}83 \text{ s} .$$

b) Se il piano inclinato presenta attrito, l'accelerazione di trascinamento non sarà $g\ \sin\alpha$, ma $g\ \sin\alpha - \mu\ g\ \cos\alpha = g\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, pertanto avremo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(1-\sin\alpha+\mu\ \cos\alpha)}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\sin\alpha+\mu\ \cos\alpha}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{0,5+0,3\cdot 0,865}} = 2,30\ \text{s} \quad .$$

7.22. Sapendo che il valore standard dell'accelerazione di gravità terrestre a 45° Lat è 9,80665 m/s^2 (non corretto per gli effetti connessi alla rotazione terrestre), calcolare: a) il valore corretto per tali effetti, b) il nuovo valore dell'accelerazione di gravità a 45°Lat, se la velocità angolare di rotazione della Terra raddoppiasse. **(4)**



---

a) Il solo termine correttivo è l'accelerazione di trascinamento: con riferimento alla figura, applicando il teorema di Carnot, si ricava che l'accelerazione *g'* corretta per la presenza di un'accelerazione di trascinamento è

$$g' = \sqrt{g^2 + a_T^2 - 2g\,a_T\cos 45°} = \sqrt{g^2 + \omega_T^4 d^2 - 2g\,\omega_T^2 d\cos 45°},$$

$$\text{con } d = r_T\cos\varphi = 6,36\cdot 10^6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4,5\cdot 10^6\,\text{m}.$$

Abbiamo quindi

$$g' = \sqrt{(9,80665)^2 + (0,0239)^2 - 2\cdot 9,80665\cdot 0,0239\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 9,78976\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Dobbiamo semplicemente ripetere gli stessi calcoli con

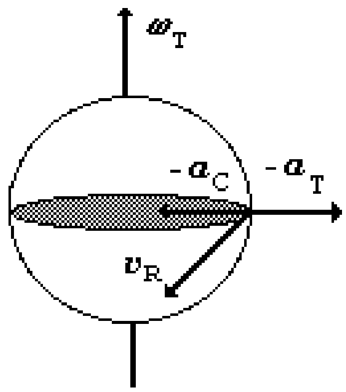
$$\omega_T = 14,58\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

ottenendo, dopo qualche ulteriore calcolo,

$$g' = 9,73928\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

7.23. Da un punto della linea equatoriale viene lanciato tangenzialmente alla linea in verso opposto a quello di rotazione terrestre un proiettile con velocità v_R. Calcolare: a) per quale valore di v_R il proiettile si muove come in un sistema inerziale, b) l'accelerazione centripeta per tale valore.

(5)



---

a) Il proiettile si muoverà come in un sistema inerziale quando l'accelerazione relativa coincide con quella assoluta, cioè quando, in base al teorema delle accelerazioni relative accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis sono uguali e opposte, come in figura.
In modulo, deve essere

$$\omega_T^2 \, r_T = 2\omega_T v_R ,$$

da cui

$$v_R = \frac{\omega_T \, r_T}{2} = \frac{7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}36 \cdot 10^6}{2} = 231{,}8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) L'accelerazione centripeta coincide con l'opposto dell'accelerazione di Coriolis, ovvero

$$a_c = 2\,\omega_T \, v_R = 2 \cdot 7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 231{,}8 = 3{,}4 \, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} .$$

7.24. Un orologio a molla munito di una sferetta terminale di massa m = 300 g è installato a bordo di un razzo che si sta allontanando da Terra con accelerazione costante a = 3 g. Calcolare il peso relativo della massa m.

(2)

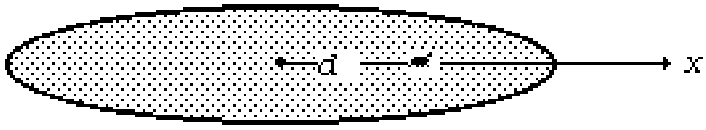
L'orologio misura un'accelerazione relativa espressa da

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{g} - (-\,\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{a},$$

perciò per esso il peso relativo (o apparente) della massa m sarà in modulo

$$P_R = m\,(a + g) = 11{,}77 \text{ N}.$$

7.25. Una pulce è in quiete su un disco dei Beatles a distanza d = 10 cm dal centro e il coefficiente di attrito pulce-disco è μ = 0,6. Calcolare se il disco deve essere a 33, 45 o 78 giri, sapendo che appena azionato il giradischi la pulce schizza via. **(3)**



———

La pulce deve acquistare un'accelerazione relativa $\boldsymbol{a}_R$ in direzione radiale verso l'esterno; dovrà essere, per il teorema delle accelerazioni relative:

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

dove l'accelerazione assoluta è dovuta agli attriti e come tale esprimibile, assumendo un asse x orientato verso l'esterno, come $-\mu\ g$, mentre l'accelerazione di trascinamento è un'accelerazione centripeta e come tale espressa da $-\ \omega^2\ d$. Dovendo essere $a_R > 0$, sarà

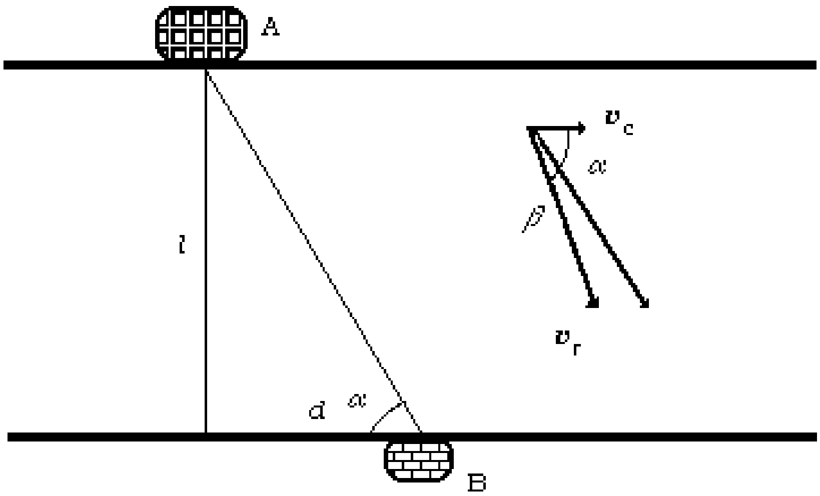
$$-\mu\ g + \omega^2\ d > 0,$$

cioè

$$\omega > \sqrt{\frac{\mu\ g}{d}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 9,8}{0,1}} = 7,7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 73,6\ \frac{\text{giri}}{\text{min}}.$$

Il disco deve pertanto essere di 78 giri.

7.26. Un nuotatore vuole attraversare un fiume largo l = 100 m per portarsi dal capanno A al capanno B che si trova d = 50 m più avanti sulla riva opposta. La corrente del fiume ha velocità costante v_c = 0,9 km/h, mentre il nuotatore può nuotare con velocità costante v_r = 1,8 km/h. Calcolare: a) in quale direzione deve tuffarsi, b) quanto tempo impiegherà a raggiungere il capanno B. **(3)**



———

a) Il nuotatore deve tuffarsi in una direzione tale che la composizione della velocità relativa v_r con cui si tuffa e della velocità di trascinamento, che altro non è che la velocità della corrente v_c, fornisca una velocità assoluta nella direzione AB.
L'angolo cercato è $\alpha + \beta$.
Abbiamo contemporaneamente, osservando la figura e applicando il teorema dei seni:

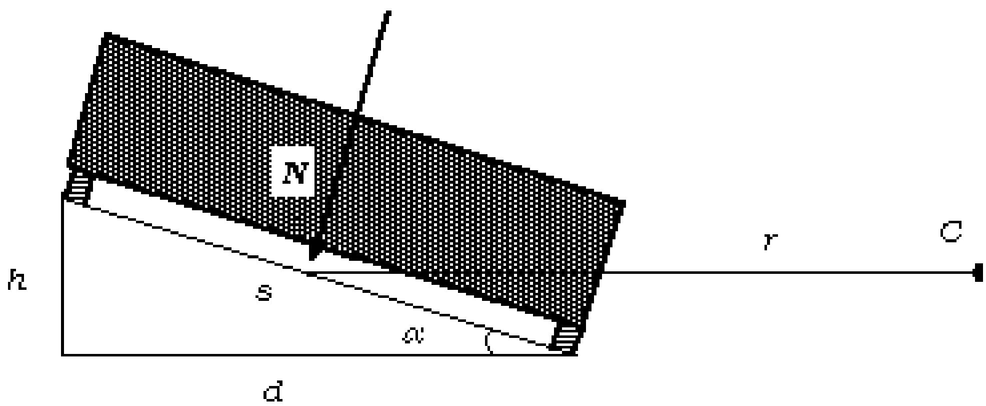
$$\tan\alpha = \frac{l}{d} = 2,$$
$$\alpha = 63°26',$$
$$\frac{v_c}{v_r} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$
$$\sin\beta = \sin\alpha\frac{v_c}{v_r} = 0,894 \cdot \frac{1}{2} = 0,447,$$
$$\beta = 26°34'.$$

L'angolo cercato risulta esattamente di 90°.

b) Il tempo impiegato per la traversata è il rapporto tra la distanza effettivamente percorsa e la velocità assoluta, ovvero

$$t = \frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{\sqrt{v_c^2 + v_r^2}} = \sqrt{\frac{12500}{0,3125}} = 200\,\text{s}.$$

7.27. Nei binari ferroviari in curva la rotaia esterna esercita sulla ruota una reazione vincolare centripeta, mentre il bordo della ruota esercita sul binario una reazione centrifuga logorandolo. Per ovviare a tale inconveniente si realizzano in curva rotaie sopraelevate. Calcolare di quanto deve essere sopraelevata una rotaia in una curva con raggio r = 600 m perché un treno possa affrontare la curva con velocità v = 72 km/h su un binario con scartamento s = 1,44 m senza produrre l'effetto di logoramento. **(5)**



———

Nel caso di rotaia sopraelevata la forza normale al piano $\boldsymbol{N}$, che determina la forza di attrito e quindi le condizioni di equilibrio del treno in curva, ha due componenti, una orizzontale, $N \sin\alpha$, rivolta verso il centro di curvatura C della curva e che fornisce la forza centripeta, e una verticale, $N \cos \alpha$, che si identifica col peso della carrozza.
Abbiamo allora

$$N \sin\alpha = \frac{mv^2}{r},$$
$$N \cos\alpha = mg.$$

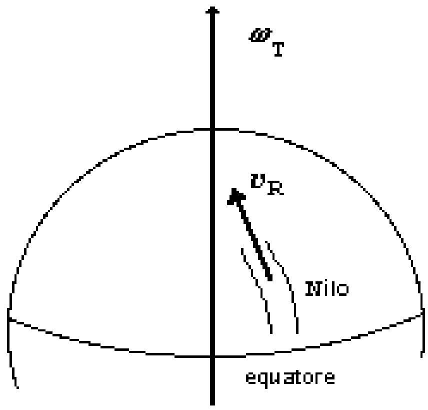
Dividendo membro a membro, si ha:

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2}},$$

da cui, dopo qualche passaggio:

$$h = \frac{v^2 s}{\sqrt{v^4 + r^2 g^2}} = \frac{400 \cdot 1{,}44}{\sqrt{3{,}47 \cdot 10^7}} = 9{,}8 \cdot 10^{-2}\text{m} = 9{,}8 \text{ cm}.$$

7.28. Il Nilo scorre verso nord a 30°Lat con velocità v_R = 30 m/s e una molecola d'acqua ha peso molecolare M =18 g/mol. Calcolare la forza apparente esercitata sulle sponde del fiume da una molecola d'acqua, in modulo, direzione e verso, sapendo che la velocità angolare di rotazione terrestre vale ω_T= 7,29 $\cdot 10^{-5}$rad/s e che il numero di Avogadro vale N_0= 6,02 $\cdot 10^{23}$ molecole/mol. Stabilire inoltre se tale forza eroderà maggiormente la sponda destra o sinistra del fiume. **(4)**



———

La forza apparente in questione può essere solo quella di Coriolis (infatti la forza centrifuga di trascinamento agisce sul letto del fiume e non sulle sponde).
Per un osservatore terrestre (relativo), detta m la massa di una molecola d'acqua, la forza di Coriolis è data da

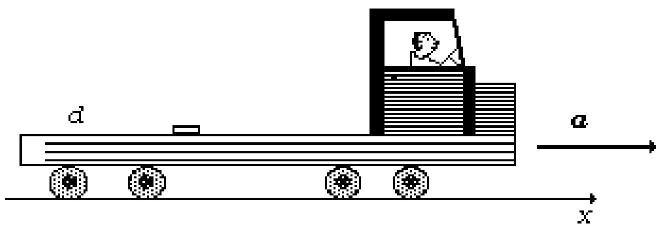
$$\boldsymbol{F}_C = 2m\, \boldsymbol{\omega}_T \wedge \boldsymbol{v}_R,$$

e l'angolo tra i due vettori non è altro che l'angolo di latitudine; tale forza è perpendicolare al piano contenente i due vettori $\boldsymbol{\omega}_T$ e $\boldsymbol{v}_R$, cioè è diretta perpendicolarmente alle sponde; dalla regola della mano destra è facile stabilire che il verso è orientato verso la riva destra (orografica, cioè percorrendo il fiume dalla sorgente del lago Vittoria) che risulta per tale motivo più erosa della sinistra.
Ricordando che la massa di una molecola si può esprimere come rapporto tra il peso molecolare M e il numero di Avogadro N_0, il modulo di tale forza sarà

$$F_C = 2\frac{M}{N_0}\omega_T\, v_R \sin 30° = 2\cdot\frac{18\cdot 10^{-3}}{6{,}02\cdot 10^{23}}\cdot 7{,}29\cdot 10^{-5}\cdot 10\cdot 0{,}5 =$$
$$= 2{,}18\cdot 10^{-29}\,\text{N}.$$

Può sembrare una forza del tutto trascurabile e può apparire inverosimile che essa possa procurare l'erosione della riva del Nilo, ma vedremo nel Problema **8.1** che il numero di molecole incidente per centimetro quadrato di sponda è enorme e tale da giustificare un cospicuo effetto erosivo.

7.29. Sul pianale di un camion fermo un mattone dista d = 5 m dal bordo posteriore e il coefficiente di attrito tra mattone e pianale è μ = 0,1; se il camion viene accelerato per t = 2 s con accelerazione costante a = 2 m/s^2, proseguendo poi con velocità costante, calcolare: a) l'accelerazione attribuita al mattone dal camionista, b) la velocità costante del camion, c) lo spostamento del mattone sul pianale. **(4)**



———

a) Per il teorema delle accelerazioni relative il mattone sarà soggetto per un osservatore a bordo del camion a un'accelerazione relativa

$$\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{a}_A - \boldsymbol{a}_T,$$

dove $\boldsymbol{a}_A$ è l'accelerazione assoluta, dovuta alla forza di attrito, orientata nel verso positivo dell'asse x dal momento che ostacola lo spostamento del mattone che avviene nel verso negativo dell'asse x; $\boldsymbol{a}_T$ è l'accelerazione di trascinamento, ovvero quella del camion; potremo allora scrivere che

$$a_R = \mu\, g - a = -\,0{,}94\ \text{m/s}^2,$$

cioè il mattone accelera verso sinistra percorrendo nel tempo t = 2 s un tratto

$$l = \frac{1}{2}\, a_R t^2 = 1{,}88\ \text{m}\ (< d).$$

b) Dopo 2 s il mattone avrà una velocità relativa, verso sinistra,

$$v_R = a_R\, t = 1{,}88 \text{ m/s},$$

mentre il camion proseguirà con velocità

$$v = a\, t = 3{,}84 \text{ m/s}.$$

c) Applicando il principio di conservazione dell'energia, possiamo determinare la distanza s percorsa dal mattone sul pianale dopo 2 s:

$$\frac{1}{2}\, m\, v_R^2 = \mu\, m\, g\, s,$$

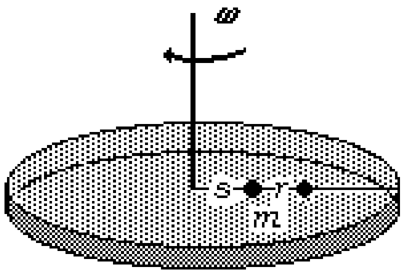
$$s = \frac{v_R^2}{2\mu\, g} = \frac{1{,}88^2}{0{,}2 \cdot 9{,}8} = 1{,}8 \text{ m}.$$

Il mattone si fermerà quindi a una distanza dal bordo

$$x = d - l - s = 1{,}32 \text{ m}.$$

7.30. Una particella di massa m = 10 g è in quiete su una piattaforma orizzontale liscia che sta ruotando con velocità angolare ω = 10 rad/s. Se la particella si sposta radialmente dalla posizione iniziale s = 1 m alla posizione r = 2 m con velocità relativa alla piattaforma v = 3 m/s, calcolare il lavoro: a) della forza di Coriolis, b) della forza di trascinamento, c) della forza assoluta.

(4)



---

a) La forza di Coriolis è perpendicolare sia alla velocità relativa v sia alla velocità angolare della Terra, quindi è perpendicolare al piano della figura e allo spostamento radiale della particella; il lavoro di tale forza sarà quindi nullo.
b) La forza di trascinamento è orientata radialmente verso il centro della piattaforma e vale in modulo $m\omega^2 x$, se x è la generica posizione della particella. Abbiamo allora

$$L_{tr} = \int_s^r m\,\omega^2 x\, dx = \frac{1}{2} m\,\omega^2 (r^2 - s^2) = 1{,}5 \text{ J}.$$

c) La forza assoluta è la somma della forza relativa (nulla essendo costante la velocità del corpo), della forza di trascinamento e di quella di Coriolis. Il lavoro di tale forza coincide quindi con quello della forza di trascinamento.