10 Termologia

(29 problemi, difficoltà 101, soglia 71)

Formulario

Leggi di dilatazione dei liquidi e solidi

lineare	$l_t = l_0(1 + \lambda\,\Delta t)$	
superficiale	$S_t = S_0(1 + \beta\,\Delta t)$	$\beta \approx 2\lambda$
cubica	$V_t = V_0(1 + \gamma\,\Delta t)$	$\gamma \approx 3\lambda$

Leggi dei gas perfetti

legge di Charles	$V_t = V_0(1 + \alpha\,\Delta t)$	(p = costante)
legge di Gay-Lussac	$p_t = p_0(1 + \alpha\,\Delta t)$	(V = costante)
legge di Boyle	$p\,V = p_0\,V_0$	(T = costante)
equazione di stato di Clapeyron	$p\,V = n\,R\,T$	

$\alpha = \dfrac{1}{T}$

n, numero di moli

$R = 8{,}314\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$

Scale di temperatura

	Punti fissi	
Celsius	0 °C	100 °C
Kelvin	273,15	K 373,15 K
Fahrenheit	32 °F	212 °F

Legge di Fourier

$$\frac{\delta Q}{dt} = -k\,A\,\frac{dT}{dx} \quad \text{(flusso termico)}$$

k, coefficiente di conducibilità termica

Calore specifico

$$c = \frac{1}{m}\,\frac{\delta Q}{dt}$$

Relazione fondamentale di Mayer

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} m\,c\,dt$$

$$Q = m\,c\,\Delta t \qquad \text{(se } c \text{ è costante)}$$

Capacità termica

$$C = \frac{\delta Q}{dt} = m\,c$$

Calore latente

$$c_1 = \frac{Q}{m}$$

Miscele

Temperatura di equilibrio

$$t_{\text{eq}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

Calore specifico

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Unità di misura

coefficiente di dilatazione termica	gradi alla meno uno ($°C^{-1}$, K^{-1})
flusso termico	watt (W)
conducibilità termica	watt al metro kelvin (W/m K)
calore specifico	joule al kilogrammo (kelvin J/kg K) calorie al grammo grado (cal/g °C) $1\,\frac{\text{cal}}{\text{g}°\text{C}} = 4186\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$
capacità termica	joule al kelvin ($\frac{\text{J}}{\text{K}}$) calorie al grado Celsius ($\frac{\text{cal}}{°\text{C}}$) $1\,\frac{\text{cal}}{°\text{C}} = \frac{4{,}186\,\text{J}}{\text{K}}$
calore latente	joule al kilogrammo ($\frac{\text{J}}{\text{kg}}$) calorie al grammo ($\frac{\text{cal}}{\text{g}}$) $1\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} = 4186\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$

Problemi svolti

10.1. Una sostanza può entrare in ebollizione:

a) solo se contiene aria,
b) solo se è sufficientemente calda,
c) solo se la sua tensione di vapore supera la pressione esterna,
d) solo se la pressione esterna è sufficientemente bassa,
e) solo se la sua temperatura di liquefazione è alta. **(2)**

La condizione indispensabile è la c), mentre la a) favorisce l'ebollizione, ma non è strettamente indispensabile, perché anche un liquido totalmente privo di aria occlusa può entrare in ebollizione.

10.2. Se a 1 g di ghiaccio alla temperatura di 0°C e alla pressione di 1 atm vengono fornite Q = 100 cal, quale sarà la sua temperatura finale (calore di fusione: 80 cal/g) ? **(2)**

La quantità di calore fornita al ghiaccio viene utilizzata in parte per la fusione e la restante parte, una volta diventato acqua, per aumentarne la temperatura; con ovvio significato dei simboli, sempre trascurando ogni dispersione, scriviamo:

$$Q = m\, c_f + m\, c\, (x - t_o),$$

da cui

$$x = t_o + \frac{Q - m\, c_f}{m\, c} = \frac{100 - 1 \cdot 80}{1 \cdot 1} = 20°\, C.$$

10.3. Un miscuglio comprende m_1=120 g di una sostanza con calore specifico c_1= 0,2 cal/(g °C) a temperatura t_1= 20°C, m_2= 140 g di una sostanza con calore specifico c_2= 0,28 cal/(g °C) a temperatura t_2= 10°C ed m_3 = 200 g di una sostanza con calore specifico c_3 = 0,12 cal/(g°C) a t_3 =2°C. Calcolare: a) la capacità termica del miscuglio, b) la temperatura di equilibrio, c) il calore specifico, d) la quantità di calore assorbita dalla sostanza più fredda.

(3)

a) Tutte le grandezze risultanti per una miscela di sostanze devono essere calcolate con le formule cosiddette dei pesi statistici, ovvero

$$C = m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 = 87,2\ \frac{\text{cal}}{°\,\text{C}}.$$

b)

$$t_{eq} = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + m_3 c_3 t_3}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3} = 10,6\ °\,\text{C}.$$

c) Allo stesso modo sarà

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,19\ \frac{\text{cal}}{\text{g}°\,\text{C}}.$$

d) Risulta

$$Q = m_3\, c_3\, (t_{eq} - t_3) = 200 \cdot 0,12 \cdot 8,6 = 206,4\ \text{cal} = 863\ \text{J}.$$

10.4. La capacità termica di un corpo dipende dalla temperatura attraverso la relazione $C = (10 + 2 \cdot 10^{-2}\, T + 3 \cdot 10^{-5}\, T^2)\ \frac{\text{J}}{\text{K}}$. Determinare la quantità di calore assorbita dal corpo nel passaggio da T_1 = 300 K a T_2 = 400 K. **(2)**

Sarà

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} (10 + 2 \cdot 10^{-2}\, T + 3 \cdot 10^{-5}\, T^2)\; dT =$$

$$= 10\,(T_2 - T_1) + 10^{-2}(T_2^2 - T_1^2) + 10^{-5}(T_2^3 - T_1^3) =$$

$$= 10 \cdot 100 + 10^{-2} \cdot 7 \cdot 10^4 + 10^{-5} \cdot 37 \cdot 10^6 = 2{,}07 \text{ kJ}.$$

10.5. In un recipiente di vetro vengono mescolati m_1 = 1,5 kg d'acqua a temperatura t_1 = 80°C con m_2 = 1 kg di un liquido di calore specifico c_2 = 2000 unità SI a temperatura t_2 = 60°C. Se nel mescolamento si disperde attraverso le pareti del recipiente una quantità di calore Q = 80 kJ, quale sarà la temperatura di equilibrio della miscela?

(2)

———

Basta scrivere che la somma algebrica della quantità di calore dispersa, di quella assorbita dal liquido e di quella ceduta dall'acqua è nulla, per ricavare

$$t_0 = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 - Q}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{1{,}5 \cdot 4186 \cdot 80 + 1 \cdot 2000 \cdot 60 - 80000}{6279 + 2000} = 65{,}5°\,\text{C}.$$

10.6. Due cubetti di ghiaccio con la stessa massa m = 30 g a –4°C, vengono appoggiati su due blocchi, uno di legno (c_1 = 0,4 cal/g °C) e uno di rame (c_{Cu}= 0.09 cal/g °C), con la stessa massa M = 2 kg, lo stesso spessore, la stessa superficie e la stessa temperatura di 14 °C,e fondono completamente. Trascurando le dispersioni di calore in aria, calcolare la temperatura dell'acqua di fusione: a) sul legno e b) sul rame, una volta raggiunto l'equilibrio termico.

(3)

———

a) La quantità di calore necessaria per fondere i cubetti e portare acqua e blocco all'equilibrio termico è

$$Q = m\,c_f + m\,c_{gh}(0 - t_i) + m\,c_{H_2O}(t_o - 0)\,;$$

trascurando ogni dispersione, tale quantità di calore deve coincidere con quella ceduta dai due blocchi, cioè

$$Q = M\,c_b(t_b - t_o)\,,$$

dove

$$t_i = -4\text{ °C},\ t_b = 14\text{ °C},\ c_{gh} = 0{,}5\text{ cal/ (g °C)}.$$

Allora, per il **legno**, sarà

$$t_{o\,legno} = \frac{M\,c_1\,t_b - m\,c_f - 4\,m\,c_{gh}}{m\,c_{H_2O} + M\,c_1} = 10{,}53\text{°C},$$

mentre per il **rame**:

$$t_{\text{o rame}} = \frac{M\,c_{\text{Cu}}\,t_{\text{b}} - m\,c_{\text{f}} - 4\,m\,c_{\text{gh}}}{m\,c_{\text{H}_2\text{O}} + M\,c_{\text{Cu}}} = 0,28\,°\text{C}.$$

10.7. Il fondo di una pentola di acciaio (conducibilità termica k = 50 unità SI) di superficie S = 300 cm^2 e spessore s = 8 mm ha la faccia superiore a temperatura ambiente t_1 = 20 °C e la faccia inferiore a contatto con la fiamma a temperatura t_2= 300 °C. Sapendo che le dispersioni di calore attraverso le pareti della pentola e in aria ammontano al 70%, calcolare il tempo necessario per portare alla temperatura di ebollizione (t_{eb} = 100 °C) in tale pentola una massa d'acqua m = 2 kg.

(4)

Dobbiamo tener presente che la faccia superiore del fondo della pentola non si manterrà costantemente a 20 °C, ma aumenterà lentamente la propria temperatura ricevendo calore per conduzione dalla fiamma sottostante.
Dalla legge di Fourier, la quantità infinitesima δQ di calore che attraversa nel tempo $d\tau$ il fondo della pentola è:

$$\delta Q = k S \frac{(t_2 - t)}{s} d\tau,$$

dove abbiamo indicato con t la generica temperatura della faccia superiore.
Solo il 30% di tale quantità di calore verrà utilizzata per aumentare la temperatura dell'acqua di una quantità dt fino a raggiungere la temperatura t_{eb}, perciò possiamo scrivere:

$$\delta Q = m\,c\,dt = 0,3\,k S \frac{(t_2 - t)}{s} d\tau,$$

da cui

$$\tau = \frac{m\,c\,s}{0,3\;k\;S}\int_{20}^{100} \frac{dt}{300 - t} = -\frac{m\,c\,s}{0,3\;k\;S}\Big[\ln(300 - t)\Big]_{20}^{100} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 4180 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-1} \cdot 50 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \ln\frac{5}{7} = 50,4\,\text{s}.$$

10.8. Una massa d'acqua a temperatura T_1 = 0°C inizia l'ebollizione dopo t_1 =15 min posta su un fornello; sullo stesso fornello ci vogliono altri t_2= 80 min per far evaporare completamente l'acqua. Trascurando la capacità termica del contenitore e ogni dispersione di calore, calcolare il calore latente di ebollizione.

(3)

La quantità di calore necessaria per portare l'acqua alla temperatura di ebollizione è

$$m\,c\,\Delta t = W\,t_1,$$

dove c è il calore specifico dell'acqua e Δt = 100°C, mentre la quantità di calore necessaria con lo stesso fornello di potenza W per far evaporare completamente la massa m è

$$m\,c_{eb} = W\,t_2.$$

Dividendo membro a membro, si ricava:

$$c_{eb} = \frac{t_2}{t_1}\,c\,\Delta t = \frac{80}{15}\cdot 1\cdot 100 = 533{,}3\ \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 2{,}23\cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

10.9. Un thermos contiene un volume d'acqua V = 150 cm^3 a temperatura t_a=30°C. Per raffreddarla, si aggiungono due cubetti di ghiaccio a temperatura t_1 = 0°C entrambi di massa m = 10 g. Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è c_f = 80 cal/g, calcolare la temperatura finale dell'acqua.

(3)

Ipotizzando che non vi siano dispersioni di calore, possiamo scrivere che i due cubetti prima fondono, poi si portano alla temperatura di equilibrio t_{eq}; pertanto la somma algebrica delle quantità di calore scambiate dai cubetti e dall'acqua deve essere nulla:

$$2\,m\,c_f + 2\,m\,c\,t_{eq} + M\,c\,(t_{eq} - t_o) = 0,$$

da cui

$$t_{eq} = \frac{M\ c\,t_o - 2\,m\,c_f}{(M+2\,m)\,c} = \frac{0{,}15\cdot 4{,}18\cdot 10^3\cdot 30 - 2\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}34\cdot 10^5}{0{,}17\cdot 4{,}18\cdot 10^3} = 17{,}1\ °\text{C}.$$

10.10. Se il coefficiente di dilatazione lineare dell'oro a temperatura t_1 = 20 °C è λ = 1,4000·10^{-5} °C^{-1}, calcolarne il valore alla temperatura t_2 = 400 °C.

(3)

La legge di dilatazione lineare

$$l_t = l_0\,(1 + \lambda_0\,t),\ (1)$$

si applica, con ovvio significato dei termini, ipotizzando che nell'intervallo di temperatura (0° – t) si mantenga costante il coefficiente di dilatazione λ_0 a 0 °C (λ dipende in realtà lievemente dalla temperatura).
Per fare ciò, scriviamo la (1) tra due generiche temperature t_1 e t_2:

$$l_1 = l_0\,(1+\lambda_0\, t_1)$$
$$l_2 = l_0\,(1+\lambda_0\, t_2).$$

Ma è anche

$$l_2 = l_1\,[\,1+\lambda_1\,(t_2 - t_1)\,],$$

da cui, in generale

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0\, t_1}\;; \qquad (2)$$

applicando la (2) alla temperatura di 20 °C, abbiamo

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 t_1} = \frac{1,4\cdot 10^{-5}}{1-2,8\cdot 10^{-4}} = 1,4004\cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}.$$

Applicando ora ancora la (2) tra 0 e 400 °C, otteniamo

$$\lambda_{400} = \frac{1,4004\cdot 10^{-5}}{1-400\cdot 1,4004\cdot 10^{-5}} = 1,4082\cdot 10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{C}^{-1}.$$

10.11. Un pendolo galileiano è realizzato con un filo di quarzo e oscilla in un ambiente a temperatura t_1 = 20 °C. Se lo stesso viene portato in una fonderia dove la temperatura è t_2 = 50 °C, calcolare di quanto va avanti o indietro tale pendolo in 24 h, sapendo che il coefficiente di dilatazione lineare del quarzo a 20 °C è $\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ °C^{-1}. **(4)**

———

I periodi di oscillazione nelle due diverse condizioni termiche sono

$$T_{20} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{20}}{g}}\,,$$
$$T_{50} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{50}}{g}}\,,$$

da cui

$$\frac{T_{50}}{T_{20}} = \sqrt{\frac{l_{50}}{l_{20}}} = \sqrt{\frac{1+50\,\lambda}{1+20\,\lambda}} = \sqrt{\frac{1+2,5\cdot 10^{-5}}{1+10^{-5}}} = 1,0000073\,.$$

Il periodo del pendolo è dunque maggiore a 50 °C; in 24 h esso rallenterà di

$$7{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 86400 = 0{,}6 \text{ s}.$$

10.12. Il bulbo di un termometro a mercurio è sferico di raggio interno r_b = 7 mm, mentre il cannello di vetro a esso collegato ha raggio interno r_v = 0,3 mm. La colonnina di mercurio nel cannello è lunga l_1 = 5 cm alla temperatura t_1 = 20 °C. Se il coefficiente di dilatazione lineare del mercurio vale $\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}, trascurando la dilatazione del vetro, calcolare la lunghezza della colonnina di mercurio a temperatura t_2 = 40 °C.

(4)

———

Il problema si risolve tenendo conto che la colonnina si allunga per un duplice effetto: il proprio allungamento lineare espresso dalla quantità

$$\Delta l_v = l_1 \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{1 + \lambda t_1} = 5 \frac{1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{1 + 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-2}}{1{,}00036} = 1{,}8 \,\text{cm},$$

dove si è tenuto conto che la legge di dilatazione è riferita alla temperatura di 0°C e un ulteriore allungamento dovuto al fatto che il mercurio nel bulbo, dilatandosi, fuoriesce dalla stessa allungando la colonnina esterna. Quest'ultimo allungamento si può calcolare, sempre con riferimento a 0°C, come

$$\Delta l_b = \frac{\Delta V}{\pi r_v^2} = \frac{V_b 3\lambda \Delta t}{\pi r_v^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_b^3 \cdot 3\lambda \Delta t}{\pi r_v^2} = \frac{4 r_b^3 \lambda \Delta t}{r_v^2}.$$

La lunghezza della colonnina di mercurio a 40 °C sarà quindi

$$l = l_1 + \Delta l_v + \Delta l_b = 8{,}47 \text{ cm}.$$

10.13. Il motore di un'auto ha il pistone in alluminio e il cilindro in acciaio; sapendo che i coefficienti di dilatazione lineare dei due metalli valgono rispettivamente $\lambda_{Al} = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ e $\lambda_{acc} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1}, calcolare il massimo aumento di temperatura consentito per evitare il grippaggio in mancanza di olio lubrificante, se il rapporto tra il raggio del cilindro e quello del pistone alla temperatura di partenza è r =1,007. **(3)**

———

La superficie di base del pistone si dilata, per un aumento di temperatura Δt, secondo la legge

$$S_{Al} = S_{oAl}\,(1 + 2\lambda_{Al} \Delta t),$$

dove S_{oAl} è la superficie di base iniziale del pistone; allo stesso modo la superficie del foro cilindrico del motore si dilata con legge

$$S_{acc} = S_{oacc}\,(1 + 2\lambda_{acc}\,\Delta t)\,.$$

Il motore gripperà quando sarà $S_{Al} > S_{acc}$, ovvero quando

$$\Delta\ t > \frac{S_{oacc} - S_{oAl}}{2\,(S_{oAl}\lambda_{Al} - S_{oacc}\lambda_{acc})} = \frac{r^2 - 1}{2\,(\lambda_{Al} - r^2\lambda_{acc})} = \frac{1{,}007^2 - 1}{2 \cdot 10^{-5}(2{,}3 - 1{,}3 \cdot 1{,}007^2)} =$$
$$= 308\ \ \mathrm{K}.$$

Il massimo aumento di temperatura per evitare il grippaggio sarà quindi 308 K.

10.14. Due blocchi di ugual lunghezza, uno di rame (conducibilità termica k_1 = 400 unità SI), l'altro di alluminio (k_2 = 240 unità SI) vengono posti a contatto con una faccia, mentre le facce esterne sono a contatto rispettivamente con due sorgenti a temperature t_1 = 90°C e t_2 = 20°C. Determinare: a) l'unità SI di k, b) la temperatura della faccia comune in condizioni di equilibrio, c) la conducibilità termica del monoblocco così creato.

(4)

———

a) Le unità del coefficiente di conducibilità termica si ricavano immediatamente dalla legge di Fourier:

$$Q = -k\ A\,\frac{dT}{dx}\,t,$$

con ovvio significato dei simboli. Risulta che k si misura in W/(m K).

b) Se t_o è la temperatura di equilibrio, la quantità di calore che fluisce attraverso il rame sarà

$$Q_{\,Cu} = -\,k_{Cu}\ A\ \frac{t_1 - t_o}{l}\ \ t\ ,$$

dove t è il tempo e A la sezione del blocco; la quantità di calore che fluisce attraverso l'alluminio sarà, nello stesso tempo

$$Q_{\,Al} = -\,k_{Al}\ A\ \frac{t_o - t_2}{l}\ \ t\ ,$$

Uguagliando le due quantità di calore, otteniamo

$$t_o\ = \frac{k_{Cu}\ t_1\ +\ k_{Al}\ t_2}{k_{Cu}\ +\ k_{Al}} = \frac{400 \cdot 90\ +\ 240 \cdot 20}{640} = 63{,}8\ ^\circ\ \mathrm{C}\ .$$

c) La quantità di calore che passa dalla sorgente a 90°C a quella a 20°C, indicando con k la conducibilità termica equivalente, è

$$Q = -k\,A\,\frac{t_1 - t_2}{2\,l}\,t\,,$$

ma deve uguagliare la somma delle due quantità di calore Q_{Cu} e Q_{Al}, perciò risulta:

$$k = \frac{2\,k_{\mathrm{Cu}}k_{\mathrm{Al}}}{k_{\mathrm{Cu}} + k_{\mathrm{Al}}} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 240}{640} = 300\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\,.$$

10.15. Una sferetta metallica ha coefficiente di dilatazione cubica $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ $°\mathrm{C}^{-1}$ e si trova a temperatura $t_o = 0°\mathrm{C}$. Riscaldandola, il suo volume aumenta del 3%. Calcolare: a) l'aumento percentuale del raggio, b) la temperatura finale della sferetta, c) la temperatura finale se la sferetta subisse la stessa dilatazione percentuale partendo però da $t_1 = 20°\mathrm{C}$. **(3)**

---

a) Dalla formula del volume della sfera

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

si ottiene

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 dr = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot 3\frac{dr}{r} = V \cdot 3\frac{dr}{r},$$

da cui

$$\frac{dr}{r}100 = \frac{1}{3}\frac{dV}{V}100 = 1\%.$$

b) Dalla legge di dilatazione cubica, abbiamo

$$V = V_o(1 + \gamma\,\Delta t),$$

$$\frac{V - V_o}{V_o} = \gamma\,\Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{V - V_o}{\gamma V_o} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-4}} = 100\,°\mathrm{C}.$$

La temperatura finale della sferetta sarà allora 120 °C .

c) Se la temperatura iniziale fosse $t_i = 20°\mathrm{C}$, non potremmo usare la precedente legge di dilatazione, valida solo se $t_i = 0°\mathrm{C}$, ma dovremmo scrivere:

$$V_{20} = V_o(1 + 20\,\gamma),$$

$$V_x = V_o(1 + \gamma\,x),$$

da cui

$$\frac{V_x}{V_{20}} - 1 = \frac{1+\gamma x}{1+20\gamma} - 1 = \frac{\gamma(x-20)}{1+20\gamma},$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\gamma(x-20)}{1+20\gamma},$$

$$x = 20 + \frac{\Delta V}{V}\frac{1+20\gamma}{\gamma} = 20 + 3\cdot 10^{-2}\cdot\frac{1+6\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-4}} = 20 + 100{,}6 =$$
$$= 120{,}6\,°\mathrm{C}.$$

10.16. Un cubo di acciaio di spigolo a = 4 cm appeso a un filo ideale di piombo lungo l_1= 4 m è immerso in acqua di un tratto x = $a/3$. Se il coefficiente di dilatazione lineare del piombo vale λ = 2,9 ·10 $^{-5}$ °C^{-1} e la temperatura iniziale di tutto il sistema è t_1 = 10 °C, quando il tutto viene portato alla temperatura t_2 = 30 °C, calcolare, trascurando la variazione di densità dell'acqua e la dilatazione del cubo: a) la nuova altezza x' della parte immersa, b) la variazione di tensione del filo.

(5)

---

a) Detta l_o la lunghezza del filo a 0 °C ed l_2 quella a t_2 = 30 °C, sarà

$$l_1 = l_o\,(1 + \lambda\, t_1)\,,$$

$$l_2 = l_o\,(1 + \lambda t_2)\,,$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1+\lambda\, t_2}{1+\lambda\, t_1}\,,$$

quindi l'allungamento del filo è

$$\Delta\, l = l_2 - l_1 = l_1\frac{\lambda\,(t_2 - t_1)}{1+\lambda\;t_1} = \frac{4\,\cdot 2{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 20}{1+2{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 10} = 2{,}32\ \text{ mm}\,.$$

Sarà allora

$$x' = x + \Delta\, l = \frac{a}{3} + \Delta\, l = 1{,}56\ \text{ cm}\,.$$

b) La tensione iniziale del filo si ricava scrivendo le condizioni di equilibrio:

$$T = m\,g - F_{\mathrm{Arch.}} = \rho\, a^3 g - a^2 x\,\rho_{\mathrm{a}} g = a^2 g(a^2\rho - x\,\rho_{\mathrm{a}})\,,$$

dove ρ e ρ_{a} sono le densità del cubo e dell'acqua.

Dopo il riscaldamento la nuova tensione del filo sarà

$$T' = a^2 g(a^2\rho - x'\rho_a) \ ,$$

e quindi

$$\Delta T = T' - T = a^2 g\rho_a\,(x - x') = -\,a^2\,g\,\rho_a\,\Delta l = -16\cdot10^{-4}\cdot9{,}8\cdot10^{\,3}\cdot\,2{,}32\,\cdot10^{-3}\text{N} =$$
$$= -\,3{,}64\,\cdot10^{-2}\ \text{N}.$$

10.17. Una pentola di acciaio ha il fondo di spessore s = 0,2 cm e raggio r = 9 cm e contiene una massa d'acqua m = 1 kg. La parete di fondo interna si trova a T_1 = 100 °C, mentre quella esterna è a T_2 = 101 °C. Trascurando ogni dispersione di calore in aria, sapendo che la conducibilità termica dell'acciaio è k = 50 unità SI e trattando il vapore come un gas perfetto triatomico, calcolare in quanto tempo l'acqua nella pentola si trasforma in vapore a T_3 =120 °C.

(3)

Cominciamo a calcolare il flusso di calore tra le due facce del fondo della pentola con la legge di Fourier:

$$W = \frac{dQ}{dt} = -k\,S\,\frac{dT}{dx} = -k\,\pi\,r^2\,\frac{T_2 - T_1}{s} = -\,636\ \text{W}.$$

Il tempo impiegato a vaporizzare l'acqua fino a T_3 = 120 °C sarà

$$t = \frac{Q}{W} = \frac{m\,c_{eb} + m\,c(T_3 - T_1)}{W} = \frac{540\cdot10^3\cdot4{,}18 + 1{,}85\cdot10^3\cdot20}{636} = 3608{,}7\ \text{s},$$

pari a poco più di 1 h; abbiamo calcolato il calore specifico del vapor d'acqua con la relazione

$$c_p = 4R = Mc,$$

da cui

$$c = \frac{4R}{M} = \frac{4\cdot8{,}31}{18\cdot10^{-3}} = 1{,}85\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

10.18. Il coefficiente di dilatazione lineare di un liquido λ dipende dalla temperatura secondo la legge

$$\lambda = a\,t + b,$$

dove a e b sono due costanti. Una colonnina di tale liquido a temperatura t_1 è lunga l_1; ricavare l'espressione della lunghezza di tale colonnina alla temperatura t_2. **(4)**

———

La legge di dilatazione lineare deve tener conto della dipendenza di λ dalla temperatura, pertanto va scritta nella forma

$$l = l_o(1 + \int_0^t \lambda \, dt = l_o(1 + \int_0^t (at + b) \, dt = l_o\left(1 + \frac{a t^2}{2} + bt\right).$$

Sarà allora

$$l_2 = l_o\left(1 + \frac{a}{2} t_2^2 + b\, t_2\right)$$

$$l_1 = l_o\left(1 + \frac{a}{2} t_1^2 + b\, t_1\right),$$

da cui

$$l_2 = l_1 \frac{2 + a\, t_2^2 + 2b\, t_2}{2 + a\, t_1^2 + 2b\, t_1}.$$

10.19. La ruota di acciaio di una locomotiva ha un raggio r_o =1,0 m alla temperatura t_o= 0 °C. Calcolare la differenza del numero di giri della ruota d'estate (t_1 = 25 °C) e d'inverno (t_2= –25 °C) su un percorso di lunghezza l = 100 km, se il coefficiente di dilatazione lineare dell'acciaio è λ = 1,2 ·10^{-5} °C^{-1}.

(3)

———

Indicando rispettivamente con n_1 ed n_2 il numero di giri d'estate e di inverno, sarà

$$n_1 = \frac{l}{2\pi\, r_1}, \qquad n_2 = \frac{l}{2\pi\, r_2}$$

quindi

$$n_2 - n_1 = \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

dove

$$r_1 = r_o(1 + \lambda\, t_1),$$

$$r_2 = r_o(1 + \lambda\, t_2).$$

Ne consegue:

$$n_2 - n_1 = \frac{1}{2\,\pi\, r_o}\left(\frac{1}{1+\lambda\, t_2} - \frac{1}{1+\lambda\, t_1}\right) = \frac{l\lambda}{2\,\pi\, r_o}\left(\frac{t_1 - t_2}{(1+\lambda\, t_2)(1+\lambda\, t_1)}\right) =$$

$$= \frac{1,2}{6,28}\left(\frac{50}{(1-3\cdot 10^{-4})(1+3\cdot 10^{-4})}\right) = \frac{9,55}{0,997} = 9,58 \text{ giri.}$$

La ruota farà più giri in inverno, come è logico avendo un diametro minore.

10.20. In un termometro la colonnina di mercurio è lunga l_1 = 4,0 cm quando il bulbo è immerso in ghiaccio fondente a t = 0 °C ed l_2= 20 cm quando è immerso in acqua bollente a t_1=100 °C. Calcolare: a) le costanti a e b del termometro. b) La temperatura alla quale la colonnina è lunga l_3=12 cm.

(3)

---

a) Dovrà essere

$$l_1 = a\,t + b = a \cdot 0 + b = b,$$
$$l_2 = 100\,a + b,$$

da cui

$$a = 0{,}16 \text{ cm/°C}, \; b = 4{,}0 \text{ cm} .$$

b) Dalla relazione

$$l_3 = a\,x + b$$

si ricava subito la temperatura x cercata:

$$x = \frac{l_3 - b}{a} = \frac{12 - 4}{0{,}16} = 50° \text{ C}.$$

Il risultato era prevedibile in quanto, essendo la dipendenza di l da t lineare, dal momento che l_3 è la media aritmetica tra l_1 ed l_2, anche x deve essere la media aritmetica tra t e t_1.

10.21. In un calorimetro è contenuto un liquido il cui calore specifico dipende dalla temperatura con legge $c(T) = a\,T$, dove a = 1,45 cal/(kg K^2). Un mulinello immerso nel liquido viene fatto ruotare da un motore di potenza W = 745 W per un intervallo di tempo t = 1000 s. La temperatura iniziale del liquido è T_1= 300 K, mentre quella finale è T_2= 350 K. Trascurando le eventuali variazioni di volume del liquido e le capacità termiche del mulinello e del recipiente, calcolare la massa m del liquido. **(3)**

La quantità di calore ceduta al liquido sarà espressa da

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c\; dT = m\,a\int_{T_1}^{T_2} T\; dT = \frac{m\,a}{2}\,(T_2^2 - T_1^2).$$

Inoltre sarà anche $Q = W\,t$, pertanto

$$m = \frac{2Q}{a(T_2^2 - T_1^2)} = \frac{2W\,t}{a(T_2^2 - T_1^2)} = \frac{2 \cdot 745 \cdot 10^3}{1{,}45 \cdot 4{,}18 \cdot (350^2 - 300^2)} = 7{,}56 \text{ kg}.$$

10.22. Un termometro di capacità termica $C = 0{,}5\,\dfrac{\text{cal}}{°\,\text{C}}$ viene immerso in una massa d'acqua m = 8,0 g e legge una temperatura t = 33 °C indicando un aumento di temperatura Δt = 16 °C. Calcolare la temperatura dell'acqua prima di immergervi il termometro.

(4)

———

Questo problema è molto significativo perché evidenzia il fatto che per la grande maggioranza degli strumenti di misura la lettura fornita è differente da quella che la grandezza in esame aveva prima dell'interazione con lo strumento (la stessa cosa vale per gli amperometri, i voltmetri ecc.).
Se t_o è la temperatura dell'acqua prima dell'immersione del termometro, quando immergiamo il termometro esso acquista una quantità di calore

$$Q = C\,\Delta t,$$

e la stessa quantità di calore è stata ceduta dall'acqua al termometro, trascurando ogni dispersione. Allora sarà, indicando con c il calore specifico dell'acqua:

$$Q = m\,c\,(t - t_o).$$

Uguagliando le due espressioni di Q, otteniamo:

$$t_o = t + \frac{C\,\Delta t}{m\,c},$$

relazione dalla quale si vede che t e t_o coincidono **solo** se la capacità termica del termometro è nulla o se è comunque trascurabile rispetto a quella $m\,c$ del liquido.
Nel caso in esame, con i dati del problema risulta

$$t_o = 34\ °\text{C},$$

con un errore percentuale di circa il 3%, niente affatto trascurabile.

10.23. Con le necessarie precauzioni, l'acqua può essere raffreddata fino alla temperatura t = –10 °C. Quale massa m di ghiaccio si ottiene da una massa M = 1 kg di tale acqua, quando vi si lascia cadere un germe cristallino di ghiaccio a 0 °C provocandone l'immediata solidificazione? Si assuma il calore specifico dell'acqua surraffreddata uguale a quello a temperatura ambiente. **(4)**

———

La quantità di calore assorbita dall'acqua quando vi si lascia cadere il germe cristallino è

$$Q = M\,c\,(t_f - t);$$

la stessa quantità di calore viene utilizzata per produrre la massa m di ghiaccio, quindi

$$Q = m\, c_{f,}$$

da cui

$$m = \frac{M\, c(t_f - t)}{c_f} = \frac{1 \cdot 4{,}18 \cdot (0 + 10)}{80 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3} = 0{,}125 \text{ kg.}$$

10.24. In un calorimetro vengono mescolati m_1=100 g di ghiaccio a temperatura t_1 = –15 °C ed m_2 = 150 g di vapor d'acqua a temperatura t_2 = 150 °C. Determinare la composizione della miscela risultante all'equilibrio termico, assumendo che la pressione esterna sia quella atmosferica standard e sapendo che $c_{gh} = 0{,}5\ \frac{\text{cal}}{\text{g}°\text{C}}$, calore specifico del vapor d'acqua $c_v = 0{,}44\ \frac{\text{cal}}{\text{g}°\text{C}}$, calore di fusione del ghiaccio $c_f = 80\ \frac{\text{cal}}{\text{g}}$, calore di ebollizione dell'acqua $c_{eb} = 540\ \frac{\text{cal}}{\text{g}}$. **(5)**

Questo è uno dei problemi più complessi per il calcolo in quanto esso si deve risolvere per tentativi, non sapendo a priori quale sarà qualitativamente la composizione della miscela risultante. Ipotizziamo, per cominciare, che tutto il ghiaccio si porti a 0 °C, fonda, si porti poi a 100 °C e si trasformi in vapor d'acqua a una temperatura x; a sua volta il vapor d'acqua cederà calore raffreddandosi da t_2 a x. Se il risultato trovato per x non ha significato fisico, dobbiamo formulare una diversa ipotesi di composizione e ricominciare tutto daccapo.

Avremo allora

$$Q_{gh} + Q_v = m_1\, c_{gh}\, (t_f - t_1) + m_1\, c\, (t_{eb} - t_f) + m_1\, c_v\, (x - t_{eb}) + m_1\, c_{eb} + \\ + m_2\, c_v\, (x - t_2) = 0,$$

da cui

$$x = \frac{m_2 c_v t_2 - m_1 c_{gh}(t_f - t_1) - m_1 c(t_{eb} - t_f) - m_1 c_f + m_1 c_v t_{eb} - m_1 c_{eb}}{(m_1 + m_2) c_v} =$$

$$= \frac{150 \cdot 0,44 \cdot 150 - 100 \cdot 0,5 \cdot 15 - 100 \cdot 1 \cdot 100 - 100 \cdot 80}{250 \cdot 0,44} +$$

$$+ \frac{100 \cdot 0,44 \cdot 100 - 100 \cdot 540}{250 \cdot 0,44} = -531,4\ °\text{C}.$$

Essendo il risultato chiaramente assurdo, proviamo con un diverso miscuglio, ipotizzandolo formato da acqua e vapor d'acqua a 100°C. In tal caso il ghiaccio

si porta a 0°C, fonde, poi si porta a 100°C e si trasforma completamente in vapor d'acqua, mentre il vapor d'acqua si porta a 100°C e una parte di esso, x, si trasforma in acqua. Scrivendo che la somma algebrica delle quantità di calore scambiate è nulla, abbiamo:

$$m_1 c_{gh} (t_f - t_1) + m_1 c_f + m_1 c (t_{eb} - t_f) + m_2 c_v (t_{eb} - t_2) - x c_{eb} = 0,$$

$$x = \frac{m_1 c_{gh}(t_f - t_1) + m_1 c_f + m_1 c(t_{eb} - t_f) + m_2 c_v (t_{eb} - t_2)}{c_{eb}} =$$

$$= \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 15 + 100 \cdot 80 + 100 \cdot 1 \cdot 100 - 150 \cdot 0,44 \cdot 50}{540} = 28,6 \text{ g}.$$

Il miscuglio sarà formato da 121,4 di vapor d'acqua e da 28,6 g di acqua a 100°C.

10.25. In un appartamento vi sono finestre a doppi vetri per complessivi S = 30 m^2; ogni finestra comprende uno spessore s = 3 mm di vetro (conducibilità termica k_v = 0,8 unità SI), un'intercapedine d'aria spessa a = 5 mm (conducibilità termica k_a = 0,23 unità SI) e un secondo vetro identico al primo.
a) Ipotizzando nulle le dispersioni di calore attraverso fessure, pareti ecc., calcolare la potenza dissipata attraverso le finestre nel caso in cui la differenza di temperatura tra l'interno e l'esterno sia Δt = 10 °C. b) Se l'appartamento viene riscaldato elettricamente con termoventilatori di potenza complessiva W_t = 12 kW in funzione per t_1 = 12 h al giorno e se 1 kWh di energia costa 0,15 euro, quanto costa il riscaldamento di tale appartamento per 6 mesi all'anno?

(5)

---

a) Dalla legge di Fourier sulla conduzione termica, si ricava che il flusso termico, o potenza termica, attraverso una serie di materiali di spessore s_i e conducibilità termica k_i è dato da

$$W = \frac{S\,\Delta t}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{k_i}}$$

che nel nostro caso vale

$$W = \frac{300}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0,8} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,23}} = 10,2 \text{ kW}.$$

b) L'energia elettrica necessaria è

$$E = 180\, W_t\, t_1 = 180 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 3,6 \cdot 10^3 = 9,33 \cdot 10^{10}\,\text{J} = 2,6 \cdot 10^4 \text{ kWh},$$

dove si è tenuto conto che 1 kWh = 3,6 MJ.

Il costo complessivo è allora $2{,}6 \cdot 10^4 \cdot 0{,}15 = 3900$ euro, decisamente elevato specialmente se si tiene conto che la potenza impiegata può mantenere una differenza di temperatura tra interno ed esterno di $10 \dfrac{12}{10{,}2} = 11{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$, decisamente insufficiente nei mesi invernali.

10.26. Due identici pezzi di ghiaccio alla stessa temperatura iniziale $t = -12$ °C volano con la stessa velocità uno contro l'altro e in seguito all'urto si trasformano completamente in vapore a temperatura $t_v = 100$ °C. Calcolare la <u>minima</u> velocità dei due pezzi perché ciò possa accadere, sapendo che il calore di fusione del ghiaccio è $c_f = 80$ cal/g, il calore specifico del ghiaccio è $c_{gh} = 0{,}5$ cal/(g °C) e il calore di ebollizione è $c_{eb} = 540$ cal/g.

(4)

———

La prima domanda che dovrebbe porsi lo studente è il significato di <u>minima</u>. La minima velocità è quella in corrispondenza della quale tutta l'energia cinetica iniziale dei due pezzi è stata utilizzata per trasformarli in vapore, senza alcuna dispersione. Sotto tale ipotesi avremo:

$$2 \frac{1}{2} mv^2 = 2m\, c_{gh}(t_f - t) + 2m\, c_f + 2m\, c(t_{eb} - t_f) + 2m\, c_{eb},$$

da cui

$$v = \sqrt{2\left[\, c_{gh}(t_f - t) + c_f + c(t_{eb} - t_f) + c_{eb} \,\right]} =$$
$$= \sqrt{2 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 (0{,}5 \cdot 12 + 80 + 100 + 540)} = 2{,}46 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} .$$

10.27. Un corpo di massa m a temperatura $t = 17$ °C in moto con velocità $v = 80$ m/s urta centralmente un secondo corpo di massa $3m$ in quiete alla stessa temperatura e dopo l'urto i due corpi proseguono uniti. Supponendo che tutta l'energia dissipata nell'urto si trasformi in calore, calcolare la nuova temperatura del sistema se il calore specifico dei due corpi è $c = 600$ unità SI.

(3)

———

Ricaviamo prima di tutto con quale velocità proseguiranno uniti i due corpi, scrivendo la conservazione della quantità di moto nell'urto, ovvero

$$m\, v = (m + 3m)\ V,$$

da cui

$$V = v/4 .$$

Imponendo ora che la differenza tra l'energia cinetica iniziale e quella finale si sia trasformata interamente in calore per riscaldare i due corpi, abbiamo:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} 4m V^2 = 4m c \Delta t,$$

$$\Delta t = \frac{\frac{v^2}{2} - \frac{v^2}{8}}{4c} = \frac{3v^2}{32c} = \frac{19200}{32 \cdot 600} = 1 \text{ °C}.$$

La temperatura finale del sistema sarà quindi 18°C.

10.28. Un blocco di ghiaccio di massa m_o inizialmente a 0 °C viene lanciato su una pista orizzontale scabra con coefficiente di attrito μ. Tenendo conto del processo di fusione che ha luogo a causa dell'attrito e trascurando la pressione esercitata dalla parte superiore del blocco su quella a contatto con la pista, a) ricavare l'espressione della massa di ghiaccio residua in funzione della distanza x percorsa dal blocco, b) Noto il calore di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica e assumendo μ = 0,5, calcolare a quale distanza dal punto di lancio la massa del blocco si è dimezzata. **(6)**

———

a) La quantità di calore infinitesima liberata dal blocco per vincere le forze di attrito lungo un tratto infinitesimo dx è

$$dQ = -\mu m g \, dx,$$

mentre quella necessaria per fondere una massa infinitesima dm è

$$dQ = c_f \, dm;$$

uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\frac{dm}{m} = -\frac{\mu g}{c_f} dx,$$

$$\ln m = -\frac{\mu g x}{c_f} + \text{costante};$$

tenendo conto che, per x = 0, $m = m_o$, si ha che la costante di integrazione vale $\ln m_o$, quindi

$$m = m_o e^{-\frac{\mu g x}{c_f}}.$$

b) Deve essere $m = m_o/2$, perciò

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{\mu g d}{c_f}},$$

$$-\ln 2 = -\frac{\mu g d}{c_f},$$

$$d = \frac{c_f \ln 2}{\mu g} = \frac{80 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3 \cdot 0{,}69}{0{,}5 \cdot 9{,}8} = 47 \, \text{km}.$$

10.29. Nel problema **10.28** si ipotizzi un coefficiente di attrito crescente linearmente con la distanza secondo una legge

$$\mu = \mu_o + k\,x,$$

dove μ_o = 0,5 e, dopo 100 m, μ_{100} = 0,95. a) Calcolare k, b) ricavare $m\,(x)$ e c) la frazione $m\,/m_o$ a distanza d = 50 m dal punto di lancio.

(4)

———

a) Per ricavare k:

$$0{,}95 = 0{,}5 + 100\,k,$$
$$k = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1}.$$

b) Per ricavare $m\,(x)$ basta sostituire μ nell'espressione dm/m del problema **10.28**:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g(\mu_o + k\,x)}{c_f}\,dx,$$

ottenendo

$$m = m_o\ \mathrm{e}^{-\frac{g}{c_f}\left(\mu_o x + \frac{kx^2}{2}\right)}.$$

Per d = 50 m, risulta m = 0,9991 m_o.