

12 Primo principio della Termodinamica

(52 problemi, difficoltà 196, soglia 137)

Formulario

I principio della termodinamica

Per una qualsiasi trasformazione finita aperta di un generico sistema

$$Q = L + \Delta U.$$

Per una trasformazione infinitesima

$$\delta Q = \delta L + dU.$$

Per una trasformazione reversibile aperta di un gas perfetto

$$\delta Q = p dV + n c_V dT$$

Lavoro elementare di espansione

Processo reversibile $\delta L = p dV$

Processo irreversibile $\delta L = p_{\text{ext}} dV,$

dove è p_{ext} la pressione agente dall'esterno sul gas.

Lavoro di espansione lungo una linea 1

$$L = \int_l p dV \quad (\text{reversibile})$$

$$L = \int_l p_{\text{ext}} dV \quad (\text{irreversibile})$$

Calori specifici molari di un gas perfetto

Se f è il numero di gradi di libertà delle molecole

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{p=\text{costante}} = \frac{f+2}{2} R,$$
$$c_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_{V=\text{costante}} = \frac{f}{2} R.$$

Relazione di Mayer

$$c_p - c_v = R.$$

Trasformazioni termodinamiche dei gas perfetti

Isotermica	$T = \text{costante}$	$P V = \text{costante}$
Isobarica	$p = \text{costante}$	
Isocora	$L = 0$	
Isovolumica	$V = \text{costante}$	
Isodinamica	$U = \text{costante}$	
Adiabatica	$Q = 0$	$p V^\gamma = \text{costante}$ $T V^{\gamma-1} = \text{costante}$ $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{costante}$
Politropica		$p V^k = \text{costante}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \text{ esponente adiabatico (5 / 3 per gas monoatomici)}$$

$$(7 / 5 \text{ per gas biatomici})$$

$$(4 / 3 \text{ per gas poliatomici})$$

$$k = \text{esponente politropico}$$

Calore specifico molare politropico

$$c_x = c_v + \frac{R}{1 - k}.$$

Unità di misura

Quantità di calore	joule (J)
Lavoro	joule (J)
Energia interna	joule (J)
Pressione	pascal (Pa)
Volume	metri cubi (m^3)
Calore specifico molare	$\frac{\text{joule}}{\text{mole kelvin}} \left(\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right)$

N.B. = Pur trattandosi di unità non facenti parte del Sistema Internazionale, alcune addirittura fuori legge, molti autori insistono nell'impiego della caloria e del litro-atmosfera; riteniamo perciò utile riportare i relativi fattori di conversione:

$$\begin{aligned}1 \text{ l atm} &= 101 \text{ J} \\1 \text{ cal} &= 4,186 \text{ J}\end{aligned}$$

Problemi svolti

12.1. In un recipiente adiatermano a pareti rigide diviso in due parti uguali, ciascuna di volume $V = 10 \text{ m}^3$, da un setto adiatermano sono contenute nella prima metà $n_1 = 4 \text{ mol}$ di elio a temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ e nella seconda metà $n_2 = 2 \text{ mol}$ di ossigeno a temperatura $T_2 = 590 \text{ K}$. Se si toglie il setto senza compiere lavoro:

- a) precisare se il mescolamento è reversibile;
- b) dire in quale direzione avverrà prevalentemente il flusso di gas appena tolto il setto.

Calcolare:

- c) il calore specifico molare c_V della miscela;
- d) la temperatura di equilibrio;
- e) la velocità quadratica media della miscela.
- f) Dire quale dei due gas si può realmente considerare perfetto. **(4)**

a) Il processo di diffusione di un gas in un altro è sempre irreversibile anche se, come nel presente caso, le due pressioni sono molto prossime ($p_1/p_2 = 1,017$) e si potrebbe pensare a un equilibrio meccanico. Si deve invece tener conto del fatto che per riportare il sistema nelle condizioni iniziali è necessario usare una macchina che, compiendo lavoro, lascia nell'ambiente esterno una traccia indelebile.

b) La direzione del flusso di gas è individuata dalla maggior pressione e non dalla maggior temperatura, quindi, con $p_1/p_2 = 1,017$, sarà l'elio a fluire inizialmente verso l'ossigeno.

c)

$$c_V = \frac{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}{n_1 + n_2} = \frac{4 \cdot \frac{3R}{2} + 2 \cdot \frac{5R}{2}}{6} = \frac{11}{6} R ;$$

d)

$$T_0 = \frac{n_1 c_{V1} T_1 + n_2 c_{V2} T_2}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}} = 431,8 \text{ K} .$$

e) Per calcolare la velocità quadratica media è necessario calcolare prima il peso molecolare medio della miscela:

$$M = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2} = \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 32}{6} = 13,3 \frac{\text{g}}{\text{mol}} ,$$

da cui risulta poi

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\frac{3RT_0}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 431,8}{13,3 \cdot 10^{-3}}} = 899,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

f) Entrambi i gas sono a bassa pressione e lontani dalla temperatura di liquefazione, ma l'elio, più leggero e monoatomico, si avvicina maggiormente all'ipotesi di completa assenza di forze di coesione.

12.2. Calcolare il lavoro compiuto in una trasformazione adiabatica da un gas perfetto biatomico che espande da un volume $V_1 = 2 \text{ l}$ a un volume $V_2 = 5 \text{ l}$, sapendo che la pressione iniziale vale $p_1 = 1 \text{ atm}$ e quella finale vale $p_2 = 0,35 \text{ atm}$. È realmente perfetto tale gas? **(3)**

Non essendo precisato se il processo è reversibile, non siamo autorizzati ad applicare l'equazione di Poisson $p V^\gamma = \text{cost.}$, quindi, per calcolare il lavoro dobbiamo ricorrere al primo principio che, essendo $Q = 0$, fornisce

$$\begin{aligned} L = -\Delta U &= -n c_V \Delta T = -\frac{5}{2} n R \frac{(p_2 V_2 - p_1 V_1)}{n R} = -\frac{5}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= -2,5 \cdot (1,75 - 2) = 0,625 \text{ l atm} = 63,1 \text{ J} . \end{aligned}$$

Se invece il processo fosse reversibile, avremmo:

$$L_{\text{rev}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1 - \gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

I calcoli forniscono $L_{\text{rev}} = 155,3 \text{ J}$.

Il lavoro risulta maggiore nel caso di processo reversibile perché, nel caso di irreversibilità, una parte del lavoro di espansione viene utilizzata per vincere gli attriti.

Il parametro che può far decidere se il gas è o meno perfetto è la pressione, dal momento che non possiamo conoscere le temperature; essendo le pressioni iniziale e finale sufficientemente basse, il gas si può ritenere con buona approssimazione perfetto.

12.3. Ricavare l'espressione del coefficiente di dilatazione di un gas perfetto biatomico in una adiabatica reversibile. Giustificare poi alla luce del primo principio il segno del risultato trovato.

(4)

Il coefficiente di dilatazione termica è definito come

$$\alpha = \frac{dV}{V dT}.$$

Nelle adiabatiche reversibili vale l'equazione di Poisson

$$T V^{\gamma-1} = \text{costante},$$

da cui, differenziando:

$$T(\gamma - 1) V^{\gamma-2} dV + V^{\gamma-1} dT = 0,$$

$$T(\gamma - 1) dV + V dT = 0,$$

$$V dT = -T(\gamma - 1) dV,$$

che, sostituita nell'espressione di α , fornisce

$$\alpha = - \frac{dV}{T(\gamma - 1) dV} = - \frac{1}{T(\gamma - 1)} = - \frac{5}{2 T}.$$

α è una quantità negativa, ovvero la variazione di temperatura e quella di volume hanno segno opposto: un'espansione implica un raffreddamento e una compressione un riscaldamento, tipico comportamento di un gas perfetto in un'adiabatica reversibile.

12.4. Ricavare per un gas perfetto sottoposto a una politropica reversibile di esponente $h = 2$ il valore del coefficiente di comprimibilità k alla pressione $p = 1,1 \text{ atm}$.

(4)

Il coefficiente di comprimibilità è definito dalla legge

$$k = - \frac{dV}{V dp}.$$

Nel caso in esame

$$p V^2 = \text{costante},$$

da cui

$$V^2 dp + 2 p V dV = 0,$$

$$V dp + 2 p dV = 0,$$

$$V dp = - 2 p dV$$

e allora

$$k = \frac{- dV}{- 2 p dV} = \frac{1}{2 p} = \frac{1}{2,2 \cdot 1,01 \cdot 10^5} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}.$$

12.5. Una pentola di acciaio ha il fondo di spessore $s = 0,2$ cm e raggio $r = 9$ cm e contiene una massa d'acqua $m = 1$ kg. La parete di fondo interna si trova a $T_1 = 100^\circ\text{C}$, mentre quella esterna è a $T_2 = 101^\circ\text{C}$. Trascurando ogni dispersione di calore in aria, sapendo che la conducibilità termica dell'acciaio è $k = 240$ unità SI, e trattando il vapore come un gas perfetto triatomico, calcolare in quanto tempo l'acqua nella pentola si trasforma in vapore a $T_3 = 120^\circ\text{C}$.

(4)

Cominciamo a calcolare il flusso di calore tra le due facce del fondo della pentola dalla legge di Fourier:

$$W = \frac{\delta Q}{dt} = -k S \frac{dT}{dx} = -k \pi r^2 \frac{T_2 - T_1}{s} = -3052 \text{ W}.$$

Il tempo impiegato a vaporizzare l'acqua fino a $t_3 = 120^\circ\text{C}$ sarà

$$t = \frac{Q}{W} = \frac{m c_{\text{eb}} + m c(t_3 - t_1)}{W},$$

dove per calcolare il calore specifico del vapor d'acqua utilizziamo la relazione

$$c_p = 4 R,$$

valida per i gas triatomici sottoposti a pressione costante e teniamo presente che il peso molecolare del vapor d'acqua è $M = 18$ g/mol. Allora

$$c = \frac{c_p}{M} = \frac{4R}{M} = \frac{4 \cdot 8,31}{18 \cdot 10^{-3}} = 1,85 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}.$$

Otteniamo dunque

$$t = \frac{m [c_{\text{eb}} + c(t_3 - t_1)]}{W} = \frac{1 \cdot (540 \cdot 4,18 \cdot 10^3 + 1,85 \cdot 10^3 \cdot 20)}{3052} = 752 \text{ s}.$$

12.6. 1 mol di gas perfetto a temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ è contenuta a pressione $p_1 = 2 \text{ atm}$ in un recipiente a pistone mobile di massa trascurabile bloccato da un fermo ed esposto a pressione atmosferica. Togliendo il fermo, il pistone si solleva fino a raddoppiare il volume. Determinare:

- la temperatura finale del gas,
- la quantità di calore scambiata dal gas con l'esterno,
- il carattere della trasformazione,
- il tipo di trasformazione.

(4)

a) Applichiamo l'equazione di stato allo stato iniziale e finale del gas:

$$\frac{p_o V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

quindi, essendo $p_o = 1 \text{ atm}$ la pressione finale,

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = T_1 = 300 \text{ K}.$$

b) Dal primo principio della termodinamica:

$$Q = L + \Delta U,$$

ma, non essendo variata la temperatura del gas, $\Delta U = 0$, quindi $Q = L$; per il calcolo del lavoro L , teniamo conto che, essendo finita la differenza di pressione tra l'interno e l'esterno, il processo è irreversibile per la mancanza di equilibrio meccanico e il lavoro si può scrivere come

$$\begin{aligned} L &= p_{\text{ext}} \Delta V = p_o \Delta V = p_o (V_2 - V_1) = p_o V_1 = \\ &= p_o \frac{n R T_1}{p_1} = \frac{1}{2} \cdot 8,31 \cdot 300 = 1,25 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Allora

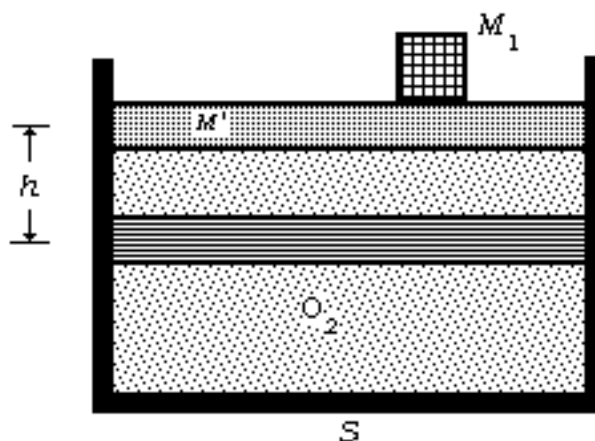
$$Q = 1,25 \text{ kJ}.$$

c) Per quanto detto sopra, la trasformazione è irreversibile.

d) Non vi sono elementi per stabilire il tipo di trasformazione; né si può concludere che il processo sia isotermico per il solo fatto che la temperatura iniziale e quella finale coincidono; un processo è isotermico **solo** se la temperatura si mantiene costante durante tutto il processo.

12.7. Una massa $m = 64$ g di ossigeno perfetto è contenuta in un cilindro di area di base $S = 200 \text{ cm}^2$ con pareti diatermane, chiuso superiormente da un pistone metallico sottile mobile senza attrito di massa $M' = 30$ kg e inizialmente in equilibrio. Se si appoggia sul pistone una seconda massa $M_1 = 20$ kg, la nuova posizione di equilibrio si raggiunge con un abbassamento del pistone di $h = 5$ cm. Calcolare: a) l'altezza iniziale del pistone, b) la temperatura ambiente. (Peso molecolare dell'ossigeno $M = 32$ g/mol)

(5)



a) Essendo le pareti diatermane, il gas sarà nelle due situazioni in equilibrio alla stessa temperatura dell'ambiente T . Se indichiamo con h_0 l'altezza iniziale del pistone:

$$\left(p_0 + \frac{M'g}{S} \right) h_0 S = \left[p_0 + \frac{(M_1 + M')g}{S} \right] (h_0 - h) S,$$

da cui

$$h_0 = \frac{h[(M_1 + M')g + p_0 S]}{M_1 g} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot (9,8 \cdot 50 + 1,01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2})}{9,8 \cdot 20} = 0,64 \text{ m},$$

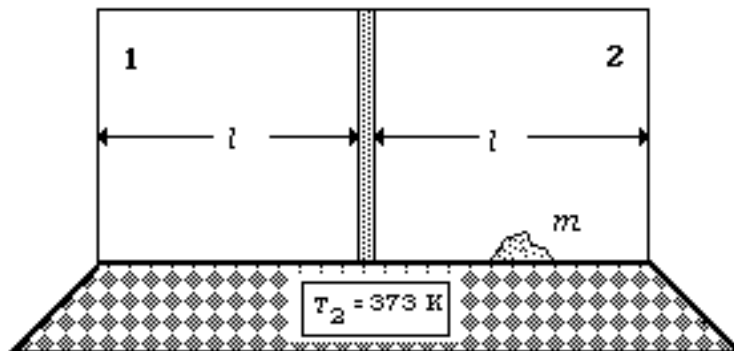
dove $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ è la pressione atmosferica.

b) Risulta poi, dall'equazione di stato dei gas perfetti applicata allo stato iniziale

$$T = \frac{\left(p_0 + \frac{M'g}{S} \right) h_0 S}{n R} = \frac{(1,01 \cdot 10^5 + 14700) \cdot 0,64 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{\frac{19}{32} \cdot 8,31} = 301 \text{ K} = 27,8 \text{ } ^\circ \text{C}.$$

12.8. Un cilindro sigillato è diviso in due parti uguali di lunghezza $l = 50$ cm da un pistone mobile senza attrito di sezione $A = 600$ cm²; nella prima metà è contenuta aria a pressione $p = 10^5$ Pa e temperatura $T = 273$ K, mentre nella seconda metà, oltre ad aria alla stessa pressione e temperatura, si trova un pezzetto di ghiaccio di massa $m = 2$ g. Se il cilindro viene appoggiato su un termostato a 100 °C, quale sarà nella nuova posizione di equilibrio del pistone il rapporto $r = V_2/V_1$?

(5)



La pressione nelle due metà nella nuova posizione di equilibrio deve essere la stessa:

$$p_1' = \frac{n R T_2}{V_1'} = \frac{n R T_2}{A(l-x)},$$

dove A è la sezione del pistone e x lo spostamento a sinistra del pistone. Ne consegue:

$$p_1' = \frac{p V}{R T} \frac{R T_2}{A(l-x)} = \frac{p A l T_2}{T A(l-x)} = \frac{p l T_2}{T(l-x)}.$$

Nella seconda metà, in seguito alla vaporizzazione del ghiaccio, il numero di moli sarà $n_2 = n + n_g$, dove $n_g = m/M$, con $M = 18$ g/mol peso molecolare del vapor d'acqua. La pressione nel recipiente 2 sarà dunque:

$$p_2' = \frac{\left(n + \frac{m}{M}\right) R T_2}{A(l+x)}.$$

Uguagliando le due pressioni:

$$\frac{p l T_2}{T(l-x)} = \frac{\left(n + \frac{m}{M}\right) R T_2}{A(l+x)},$$

$$\frac{p l}{T(l-x)} = \frac{\left(n + \frac{m}{M}\right) R}{A(l+x)},$$

da cui, dopo qualche laborioso passaggio e ricavando il numero di moli $n = 1,322$ mol, si ricava

$$x = \frac{RTl\left(n + \frac{m}{M}\right) - A p l^2}{A p l + RT\left(n + \frac{m}{M}\right)} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Il rapporto cercato sarà allora:

$$r = \frac{l + x}{l - x} = \frac{52}{48} = 1,08 \text{ .}$$

12.9. Un gas perfetto espande adiabaticamente da $p_1 = 2 \text{ atm}$ a $p_2 = 1 \text{ atm}$ con $V_1 = 2 \text{ l}$ e $V_2 = 3.36 \text{ l}$. Ipotizzando reversibile il processo, calcolare a) il numero di gradi di libertà delle molecole del gas, b) il lavoro di espansione del gas, c) lo stesso lavoro ipotizzando il processo irreversibile e confrontare il risultato ottenuto.

(3)

a) Se il processo è reversibile, possiamo applicare una delle equazioni di Poisson, scrivendo

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma, \\ \ln \frac{p_1}{p_2} &= \gamma \ln \frac{V_2}{V_1}, \\ \gamma &= \frac{\ln(p_1/p_2)}{\ln(V_2/V_1)} = \frac{\ln 2}{\ln 1,68} = \frac{4}{3}; \end{aligned}$$

si tratta di un gas poliatomico con $f = 6$ gradi di libertà.

b)

$$L = \int p \, dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} \, dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1 - \gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = 192 \text{ J}.$$

c) Nel caso di processo irreversibile,

$$L = -\Delta U = -n c_V (T_2 - T_1) = -3 (p_2 V_2 - p_1 V_1) = -3 (3,36 - 4) \cdot 101 = 194 \text{ J}.$$

I due valori non coincidono solo per le approssimazioni numeriche: infatti, in un'adiabatica L è funzione di stato e, come tale, non dipende dal carattere della trasformazione.

12.10. In un recipiente a pareti adiabatiche munito di pistone mobile sono contenuti in equilibrio termodinamico $V = 15$ l di elio. Se sul pistone cade un peso che triplica bruscamente la pressione del gas, calcolare il nuovo volume occupato dal gas.

(3)

Applichiamo il primo principio tenendo conto che $Q = 0$:

$$L + \Delta U = 0 ,$$

$$p_2(V_2 - V_1) + n c_V \left(\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n R} \right) ;$$

si noti che, trattandosi di processo chiaramente irreversibile per la notevole brusca compressione, abbiamo espresso il lavoro con la formula

$$L = \int p_{\text{ext}} dV.$$

Trattandosi di gas monoatomico, sarà $c_V = 3 R / 2$, perciò:

$$p_2(V_2 - V_1) + \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = 0 ,$$

$$2 p_2 V_2 - 2 p_2 V_1 + 3 p_2 V_2 - 3 p_1 V_1 = 0 ,$$

$$5 p_2 V_2 - 2 p_2 V_1 - 3 p_1 V_1 = 0 ,$$

$$5(3 p_1) V_2 - 2(3 p_1) V_1 - 3 p_1 V_1 = 0 ,$$

$$15 V_2 - 9 V_1 = 0 ,$$

$$V_2 = \frac{3}{5} V_1 = 9 \text{ l} .$$

12.11. 1 mol di gas perfetto monoatomico viene riscaldato reversibilmente dalla temperatura $T_1 = 300$ K a $T_2 = 400$ K; durante il riscaldamento la pressione varia con la temperatura secondo la legge

$$p = p_0 e^{k T} ,$$

dove $k = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas nel processo.

(4)

Applichiamo il primo principio della termodinamica:

$$Q = \int p dV + n c_V \Delta T = \int n R dT - \int V dp + n c_V \Delta T = n c_p \Delta T - \int V dp =$$

$$= n c_p \Delta T - \int \frac{n R T}{p} dp .$$

Differenziando l'equazione della trasformazione data, si ha:

$$dp = k p_0 e^{kT} dT,$$

che, sostituita nell'espressione di Q , fornisce

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{2} n R (T_2 - T_1) - \int \frac{n R T k p_0 e^{kT}}{p_0 e^{kT}} dT = \frac{5}{2} n R (T_2 - T_1) - n R k \left(\frac{T_2^2 - T_1^2}{2} \right) = \\ &= \frac{n R}{2} (T_2 - T_1) [5 - k(T_2 + T_1)] = \frac{8,31}{2} \cdot 100 \cdot (5 - 10^{-3} \cdot 7 \cdot 10^2) = 1,79 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

12.12. Un pallone aerostatico a pareti rigide di spessore trascurabile e volume $V = 100 \text{ m}^3$ è riempito con idrogeno ($M = 2 \text{ g/mol}$) ed è tenuto ancorato a terra in aria ($\rho = 1,3 \text{ mg/cm}^3$) in equilibrio termico con essa a $T = 300 \text{ K}$. Se la massa del pallone vuoto è $m = 10 \text{ kg}$, considerando l'idrogeno gas perfetto, calcolare: a) la massima pressione alla quale si può gonfiare il pallone perché possa sollevarsi una volta disancorato, b) la velocità del pallone alla quota $h = 200 \text{ m}$ se esso è stato gonfiato a pressione $p_0 = 10 \text{ atm}$.

(5)

a) Perché il pallone possa sollevarsi da terra, il peso complessivo pallone-gas deve essere inferiore alla spinta di Archimede esercitata dall'aria, ovvero, indicando con m_g la massa di gas:

$$(m + m_g) g < \rho g V.$$

Ma

$$pV = nRT = \frac{m_g}{M} RT,$$

perciò

$$m_g = \frac{pVM}{RT}$$

e quindi

$$m + \frac{pVM}{RT} < \rho V;$$

da cui

$$p_{\max} = \frac{(\rho V - m)RT}{MV} = \frac{(1,3 \cdot 10^2 - 10) \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 14,8 \text{ atm}.$$

b) Il pallone sarà sottoposto a un'accelerazione

$$a = \frac{F}{m + m_{go}} = g \left(\frac{\rho V}{m + m_{go}} - 1 \right) = 9,8 \left(\frac{130}{10 + 81} - 1 \right) = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

avendo calcolato la massa di gas m_{go} alla pressione p_o come

$$m_{\text{go}} = \frac{p_o V M}{R T} = \frac{1,01 \cdot 10^6 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 300} = 81 \text{ kg} .$$

La velocità del pallone alla quota h – supponendo trascurabile la resistenza dell'aria e ipotizzando che la temperatura del gas resti costante fino a tale quota – sarà data da

$$v = \sqrt{2 a h} = \sqrt{2 \cdot 4,2 \cdot 200} = 41 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

12.13. In un cilindro adiatermano con pistone adiatermano di massa trascurabile si trovano $m = 100$ g d'acqua e il tutto è appoggiato su un termostato a temperatura $t = 100$ °C. L'acqua bolle vaporizzando totalmente sotto la pressione atmosferica $p = 1$ atm. Se il calore latente di ebollizione dell'acqua è $c_{\text{eb}} = 540$ cal/g, calcolare: a) il lavoro di espansione compiuto dall'acqua per vaporizzare, b) la variazione di energia interna dell'acqua

(5)

a) Il processo è irreversibile, perciò possiamo scrivere il lavoro di espansione come

$$L = \int p_{\text{ext}} dV = p_o (V_f - V_i) = m p_o \left(\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_a} \right),$$

dove ρ_v e ρ_a sono rispettivamente le densità del vapore e dell'acqua; la densità del vapor d'acqua, considerato gas ideale, si può esprimere come

$$\rho_v = \frac{p_o M}{R T} ,$$

dove M è il peso molecolare del vapor d'acqua, pari a 18 g /mol. Ne consegue

$$L = m p_o \left(\frac{R T}{p_o M} - \frac{1}{\rho_a} \right) = 1,01 \cdot 10^4 \left(\frac{8,31 \cdot 373,15}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{1000} \right) = 17,2 \text{ kJ} .$$

b) Pur essendo il processo di ebollizione isotermico, l'energia interna non resta costante, non trattandosi di un gas perfetto; la sua variazione si calcola dal primo principio:

$$\Delta U = Q - L = m c_{\text{eb}} - L = 10^{-1} \cdot 5,4 \cdot 10^2 \cdot 4,186 \cdot 10^3 - 17,2 \cdot 10^3 = 209 \text{ kJ}.$$

12.14. Un gas subisce un processo nel quale la pressione varia con il volume secondo la relazione $p = p_0 e^{-\alpha(V-V_0)}$, dove $p_0 = 6 \cdot 10^5$ Pa, $\alpha = 0,2 \text{ m}^{-3}$, $V_0 = 2 \text{ m}^3$. Calcolare il lavoro compiuto dal gas in un'espansione da $V_1 = 2 \text{ m}^3$ a $V_2 = 4 \text{ m}^3$.

(4)

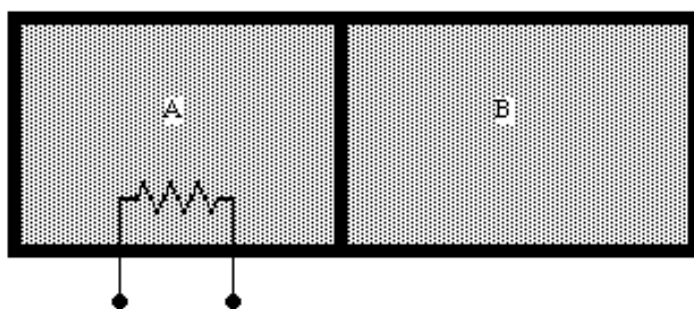
Essendo il processo reversibile, sarà

$$\begin{aligned} L &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_0 e^{-\alpha(V-V_0)} dV = -\frac{p_0}{\alpha} \int_{V_1}^{V_2} p_0 e^{-\alpha(V-V_0)} d[\alpha(V-V_0)] = \\ &= -\frac{p_0}{\alpha} \left[e^{-\alpha(V-V_0)} \right]_{V_1}^{V_2} = -\frac{p_0}{\alpha} \left[e^{-\alpha(V_2-V_0)} - e^{-\alpha(V_1-V_0)} \right] = \\ &= -\frac{6 \cdot 10^5}{0,2} \left[e^{-0,4} - e^{-0,2} \right] = -3 \cdot 10^6 \cdot (0,67032 - 0,81873) = 445 \text{ kJ} . \end{aligned}$$

12.15. Un recipiente adiatermano è munito di un setto mobile adiatermano di sezione $S = 500 \text{ cm}^2$ scorrevole senza attrito. Nelle due metà sono contenuti $V_0 = 40 \text{ l}$ di gas ideale biatomico a $p_0 = 1 \text{ atm}$ e $t_0 = 0^\circ \text{C}$. Se si cede lentamente calore al gas A mediante una resistenza elettrica fino a triplicarne la pressione, calcolare, con il setto in equilibrio:

- la temperatura finale del gas B,
- la temperatura finale del gas A,
- la quantità di calore ceduta al gas A,
- il lavoro compiuto dal gas A sul gas B,
- lo spostamento del setto.

(5)



a) Applicando una delle equazioni di Poisson, trattandosi di un processo lento in ambiente adiatermano, quindi reversibile, si ha, tenendo conto che per un gas biatomico $\gamma = 7/5$:

$$\begin{aligned} p_0^{1-\gamma} T_0^\gamma &= (3p_0)^{1-\gamma} T_B^\gamma, \\ T_B &= T_0 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 273,15 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{2}{7}} = 373,9 \text{ K}. \end{aligned}$$

b)

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R} = \frac{3 p_o (2 V_o - V_B)}{n R} = \frac{3 T_o (2 V_o - V_B)}{V_o} = \frac{3 T_o (2 V_o - \frac{n R T_B}{3 p_o})}{V_o} =$$

$$= 3 T_o (2 - \frac{T_B}{3 T_o}) = 3 \cdot 273,15 (2 - \frac{373,9}{819,5}) = 1265 \text{ K.}$$

c) Per il gas A è

$$Q = L + \Delta U_1,$$

per il gas B:

$$0 = -L + \Delta U_2,$$

per cui, sommando membro a membro:

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n c_V (T_A - T_o + T_B - T_o) =$$

$$n \frac{5}{2} R (T_A + T_B - 2 T_o) = \frac{5 p_o V_o}{2 T_o} (T_A + T_B - 2 T_o) =$$

$$= \frac{5 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 273,15} (1265 + 373,9 - 546,3) = 40,4 \text{ kJ.}$$

d)

$$L = Q - \Delta U_1 = Q - n c_V (T_A - T_o) = Q - \frac{5 p_o V_o (T_A - T_o)}{2 T_o} = Q - \frac{5}{2} p_o V_o (\frac{T_A}{T_o} - 1) =$$

$$= 3,7 \text{ kJ.}$$

e) Lo spostamento del setto si calcola come rapporto tra la variazione di volume e la sezione dello stesso, ovvero

$$s = \frac{V_A - V_o}{S} = \frac{V_o - V_B}{S} = \frac{V_o - \frac{n R T_B}{p_A}}{S} = \frac{(40 - 18,25) \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 0,435 \text{ m} =$$

$$= 43,5 \text{ cm.}$$

12.16. $n = 1$ mol di gas perfetto monoatomico a temperatura iniziale $T_1 = 300 \text{ K}$ subisce una trasformazione $p T = \text{cost.}$, al termine della quale il volume si dimezza. Calcolare: a) il calore specifico molare della trasformazione, b) la quantità di calore scambiata dal gas. **(3)**

a) Si tratta di una trasformazione politropica che scriviamo ora in coordinate (p, V) :

$$p T = p \frac{p V}{n R} = \frac{p^2 V}{n R} = \text{costante},$$

ovvero

$$p V^{1/2} = \text{costante}.$$

L'esponente politropico vale quindi $k = 1/2$ e il calore specifico molare sarà:

$$c_x = c_v + \frac{R}{1-k} = \frac{7}{2} R = 29,1 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}.$$

b) Sarà:

$$Q = n c_x \Delta T = \frac{7}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{7}{2} V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)$$

Si ha poi, dall'equazione della trasformazione nel piano (p, V) :

$$p_2 = p_1 \sqrt{2},$$

perciò

$$Q = \frac{7}{2} p_1 V_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{7}{2} n R T_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = -3,5 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot 0,293 = -2,56 \text{ kJ}.$$

12.17. Ricavare il coefficiente di dilatazione di un gas perfetto biatomico alla temperatura $T = 300 \text{ K}$ in un processo adiabatico reversibile.

(3)

Scriviamo la legge di dilatazione cubica di un gas perfetto in termini differenziali

$$dV = \alpha V dT;$$

ricordiamo poi che nei processi adiabatici reversibili di un gas perfetto di coefficiente adiabatico γ si ha

$$T V^{\gamma-1} = \text{costante},$$

differenziando la quale si ottiene

$$V^{\gamma-1} dT + (\gamma - 1) T V^{\gamma-2} dV = 0,$$

$$V dT = -(\gamma - 1) T dV$$

e quindi

$$\alpha = \frac{dV}{V dT} = -\frac{dV}{(\gamma - 1) T dV} = -\frac{1}{(\gamma - 1) T} = -\frac{1}{0,4 \cdot 300} = -8,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

12.18. La densità dell'acqua è $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, mentre quella del ghiaccio è $\rho' = 0,92 \text{ g/cm}^3$ a 0°C ; calcolare, durante la fusione del ghiaccio a pressione atmosferica costante, quale frazione del calore fornito va in lavoro e quale in variazione di energia interna, commentando il significato dei risultati trovati e in particolare i segni algebrici delle due frazioni.

(3)

Scriviamo il primo principio della termodinamica tenendo conto che il lavoro nel processo di fusione, essendo costante la pressione esterna p_o ed essendo il processo irreversibile, si scrive come

$$L = p_o (V_f - V_i),$$

dove V_f e V_i sono rispettivamente il volume finale e iniziale.

Sarà allora

$$Q = m c_f = p_o m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) + \Delta U.$$

La frazione di calore che va in lavoro sarà allora

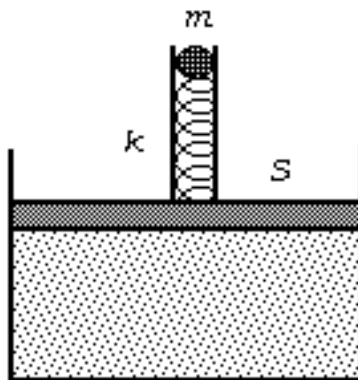
$$f_L = \frac{p_o}{c_f} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) = \frac{1,01 \cdot 10^5}{80 \cdot 4,18 \cdot 10^3} \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{920} \right) = -2,6 \cdot 10^{-5}$$

e il complemento all'unità di tale frazione ci dà la frazione di calore che va in variazione di energia interna, ovvero

$$f_U = 1,000026.$$

L'energia interna aumenta, come è logico prevedere se si pensa alla maggiore agitazione termica delle molecole d'acqua nella fase liquida finale. Il ghiaccio durante la fusione riceve lavoro dall'esterno in quanto nella fusione si verifica una diminuzione di volume.

12.19. Un gas perfetto biatomico è in equilibrio in un recipiente metallico a pareti sottili munito di pistone mobile pesante di massa $M = 2$ kg e sezione $S = 200 \text{ cm}^2$. Sul pistone, all'interno di un tubo, una molla ideale di rigidità $k = 100 \text{ N/m}$ è compressa di un tratto $x = 1 \text{ cm}$ da una sferetta di massa $m = 40 \text{ g}$ trattenuta da un fermo. Se si toglie il fermo, la sferetta schizza via in un tempo $t = 1 \text{ ms}$.



Trascurando ogni attrito e sapendo che la pressione atmosferica è $p_a = 0,96$ atm, a) calcolare la variazione di pressione del gas in seguito alla partenza della sferetta; b) precisare se il processo è o meno reversibile, c) ipotizzando una compressione isoterma, calcolare di quanto si abbassa percentualmente il pistone. **(5)**

a) Applicando il principio di conservazione dell'energia, si ricava con quale velocità schizza via la sferetta:

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = x \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Applicando poi la conservazione della quantità di moto, ricaviamo la velocità con cui si abbassa il pistone:

$$m v + M V = 0,$$

$$V = -\frac{m}{M} v = -\frac{m x}{M} \sqrt{\frac{k}{m}} = -\frac{x}{M} \sqrt{k m}.$$

La pressione supplementare esercitata dal pistone sul gas sottostante è data da:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{M V}{S \Delta t} = \frac{x}{S \Delta t} \sqrt{k m} = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}} \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ kPa}.$$

b) Trattandosi di una brusca compressione, il processo è sicuramente irreversibile.

c) Se il processo è isoterma, possiamo scrivere, indicando con p_o la pressione dovuta al peso del pistone e con h e h' le altezze iniziale e finale del pistone misurate dal fondo del recipiente:

$$(p_o + p_a) S h = (p_o + p + p_a) S h',$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{p_o + p_a}{p_o + p + p_a}.$$

L'abbassamento percentuale del pistone è dato da:

$$\frac{\Delta h}{h} 100 = \frac{h - h'}{h} 100 = \left(1 - \frac{h'}{h}\right) 100 = \left(1 - \frac{p_o + p_a}{p_o + p + p_a}\right) 100 = \frac{p}{p_o + p + p_a} 100.$$

Essendo

$$p_o = \frac{M g}{S} = \frac{2 \cdot 9,8}{2 \cdot 10^{-2}} = 980 \text{ Pa},$$

l'abbassamento percentuale sarà

$$\frac{\Delta h}{h} 100 = \frac{p}{p_o + p + p_a} 100 = \frac{1000}{1980 + 101325 \cdot 0,96} \cdot 100 = 1\%.$$

12.20. Un gas perfetto monoatomico espande da un volume V_1 a un volume $2V_1$ secondo un processo reversibile di equazione $p = a/V^3$, dove a è una costante. Determinare, in funzione di a e di V_1 , le espressioni

- del lavoro compiuto dal gas,
- della sua variazione di energia interna.
- della quantità di calore scambiata.

(4)

a) Trattandosi di processo reversibile:

$$L = \int_{V_1}^{2V_1} p dV = a \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V^3} = -\frac{a}{2} \left[\frac{1}{V^2} \right]_{V_1}^{2V_1} = -\frac{a}{2} \left(\frac{1}{4V_1^2} - \frac{1}{V_1^2} \right) = \frac{3a}{8V_1^2} > 0.$$

b)

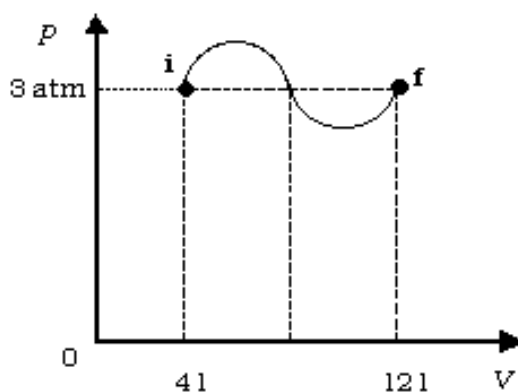
$$\begin{aligned} \Delta U &= n c_V \Delta T = n c_V (T_2 - T_1) = n c_V \left(\frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{n R} \right) = \frac{c_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= \frac{c_V}{R} \left(\frac{a V_2}{V_2^3} - \frac{a V_1}{V_1^3} \right) = \frac{a c_V}{R} \left(\frac{1}{V_2^2} - \frac{1}{V_1^2} \right) = -\frac{3a c_V}{4 R V_1^2} = -\frac{9a}{8 V_1^2} < 0, \end{aligned}$$

quindi il gas si è raffreddato.

c) Dal primo principio:

$$Q = L + \Delta U = \frac{3a}{8 V_1^2} - \frac{9a}{8 V_1^2} = -\frac{3a}{4 V_1^2} < 0.$$

12.21. $n = 1$ mol di gas perfetto triatomico subisce un'espansione reversibile di profilo sinusoidale nella quale la pressione iniziale coincide con quella finale, $p = 3$ atm, e il volume iniziale $V_1 = 4$ l triplica.



Calcolare: a) la variazione di temperatura, b) il lavoro compiuto sul gas, c) il calore scambiato dal gas durante il processo. **(4)**

a)

$$\Delta T = \frac{p_f V_f - p_i V_i}{n R} = \frac{p (V_f - V_i)}{n R} = \frac{3 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{8,31} = 291,7 \text{ K}.$$

b) Per calcolare il lavoro, in questo caso non è opportuno usare il calcolo integrale che prevedrebbe di scrivere la relazione tra pressione e volume; conviene invece ricordare che il lavoro è espresso dall'area compresa sotto il profilo della trasformazione: essendo le due metà della sinusoide perfettamente identiche, tale lavoro risulta dato dall'area del rettangolo di altezza 3 atm e base 8 l, ovvero

$$L = 3 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 2,42 \text{ kJ}.$$

Il fatto che in questo caso il lavoro sia espresso dall'area del rettangolo non vuol dire che durante il processo la pressione si sia mantenuta costante !

c)

$$Q = L + \Delta U = L + n c_v \Delta T = L + 3 n R \Delta T = 2,42 \cdot 10^3 + 3 \cdot 8,31 \cdot 291,7 = 9,7 \text{ kJ}.$$

12.22. Un gas perfetto biatomico subisce una trasformazione reversibile di equazione

$$p = p_0 (1 + T/T_0),$$

dove $p_0 = 10^{-2}$ atm e $T_0 = 300$ K.

Calcolare a) il calore specifico molare di tale trasformazione e b) il coefficiente politropico della trasformazione. **(4)**

a) Il calore specifico molare è dato da

$$c = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n} \frac{p dV + n c_v dT}{dT} = \frac{p dV}{n dT} + c_v = \frac{p dV}{n dT} + \frac{5}{2} R.$$

Per calcolare il primo termine, differenziamo la $p = p_0 (1 + T/T_0)$, ottenendo

$$dp = \frac{p_0}{T_0} dT.$$

Differenziamo poi l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p dV + V dp = n R dT.$$

Uguagliando le due espressioni di dp , abbiamo

$$(p_0 - n R T_0) dT = -p T_0 dV$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{p dV}{n dT} &= \frac{\left(\frac{n R T_0}{p_0} - V \right) p_0}{n T_0} = R - \frac{p_0 V}{n T_0} = R - \frac{p_0}{T_0} \frac{R T}{p} = \\ &= R \left(1 - \frac{p_0 T}{T_0 p_0 \left(1 + \frac{T}{T_0} \right)} \right) = \frac{R T_0}{T_0 + T}. \end{aligned}$$

Per $T = T_0$, tale termine vale $R/2$, pertanto

$$c = \frac{R}{2} + \frac{5}{2} R = 3 R.$$

b) Per calcolare il coefficiente politropico k , ricordiamo che il calore specifico molare di una politropica si esprime in generale come

$$c = c_V + \frac{R}{1 - k},$$

perciò sarà

$$k = -1.$$

12.23. L'energia interna di un gas è data da $U = a \ln (T / T_0) + b \ln (p / p_0)$, dove $a = 3 \text{ kJ}$. Fornendo al gas a pressione costante $p = 10^5 \text{ Pa}$ la quantità di calore $Q = 500 \text{ J}$, il suo volume aumenta di $\Delta V = 0,5 \text{ l}$. Calcolare la variazione percentuale di temperatura del gas.

(3)

Risulta, dal primo principio:

$$\Delta U = Q - L = Q - p \Delta V = 450 \text{ J}.$$

Ma

$$\Delta U = U_f - U_i = a \ln \frac{T_f}{T_0} + b \ln \frac{p_f}{p_0} - a \ln \frac{T_i}{T_0} - b \ln \frac{p_i}{p_0};$$

essendo però il processo isobarico, sarà anche

$$\Delta U = a \ln \frac{T_f}{T_i},$$

da cui

$$\frac{T_f}{T_i} = e^{\frac{\Delta U}{a}}$$

e

$$\left(\frac{T_f - T_i}{T_i} \right) 100 = \left(e^{\frac{\Delta U}{a}} - 1 \right) 100 = \left(e^{\frac{450}{3000}} - 1 \right) 100 = 16 \, \%.$$

12.24. Calcolare il lavoro compiuto da un gas perfetto monoatomico durante un'espansione adiabatica reversibile nella quale il volume triplica e lo stato iniziale è individuato da $p_i = 1 \text{ atm}$ e $V_i = 1 \text{ l}$.

(3)

Per una trasformazione adiabatica, reversibile o meno, si ha sempre

$$L = -\Delta U = -n c_v (T_f - T_i) = -\frac{3}{2} n R \left(\frac{p_f V_f - p_i V_i}{n R} \right) = -\frac{3}{2} \cdot V_i (3 p_f - p_i).$$

Per ricavare p_f dobbiamo utilizzare l'equazione di Poisson – valida per le adiabatiche reversibili:

$$p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = p_i \left(\frac{1}{3} \right)^{5/3}.$$

Allora:

$$L = -\frac{3}{2} p_i V_i (3^{-2/3} - 1) = 78,8 \text{ J}.$$

È facile verificare che si giunge allo stesso risultato scrivendo

$$L = \int p \, dV = p_i V_i^\gamma \int \frac{dV}{V^\gamma} = p_i V_i^\gamma \left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)_{V_i}^{3V_i}.$$

12.25. $n = 1 \text{ mol}$ di gas perfetto monoatomico inizialmente a pressione p_0 e volume V_0 espande adiabaticamente raddoppiando il volume. Confrontare a) il lavoro compiuto dal gas sull'esterno e b) la temperatura finale nei due casi in cui il processo sia reversibile o irreversibile.

(5)

Processo reversibile

a)

$$\begin{aligned} L = -\Delta U &= \int_{V_o}^{2V_o} p \, dV = p_o V_o^\gamma \int_{V_o}^{2V_o} V^{-\gamma} dV = p_o V_o^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_o}^{2V_o} = \\ &= -\frac{3}{2} p_o V_o^{5/3} \left[\frac{1}{(2V_o)^{2/3}} - \frac{1}{V_o^{2/3}} \right] = \frac{3}{2} p_o V_o \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right). \end{aligned}$$

b) Risulta

$$\Delta U = n c_V (T_f - T_o) = \frac{3}{2} R (T_f - T_o),$$

da cui

$$T_f = \frac{2\Delta U}{3R} + T_o = -\frac{2L}{3R} + T_o = T_o \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1 \right) + T_o = \frac{T_o}{\sqrt[3]{4}} = 0,63 T_o.$$

Processo irreversibile

Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti allo stato finale e indicando con $T_{f,irr}$ la temperatura finale possiamo scrivere che

$$T_{f,irr} = \frac{(2V_o) p_{f,irr}}{n R},$$

che tuttavia non siamo in grado di calcolare in quanto – non essendo più valida l'equazione di Poisson – non possiamo ricavare $p_{f,irr}$.

Possiamo però osservare che in un processo irreversibile è implicita la presenza di attriti, il cui effetto è una liberazione di calore nel gas: non potendo tale quantità di calore fuoriuscire dal recipiente adiabatermano, esso provocherà un aumento di temperatura rispetto al caso di processo reversibile. Sarà allora

$$T_{f,irr} > T_f$$

e quindi

$$\Delta U_{irr} > \Delta U,$$

da cui, dovendo essere, se L_a è il lavoro compiuto contro gli attriti

$$L + \Delta U = L_{irr} + L_a + \Delta U_{irr} = 0,$$

consegue

$$L_{\text{irr}} + L_a < L$$

e quindi

$$L_{\text{irr}} < L.$$

Il gas compie quindi una minor quantità di lavoro nel caso di processo irreversibile ed è questo un risultato prevedibile, avendo dovuto compiere lavoro per vincere gli attriti.

12.26. 1 mol di gas perfetto espande isotermicamente alla temperatura $T = 300 \text{ K}$ assorbendo $Q = 400 \text{ J}$. Se il lavoro compiuto dal gas nell'espansione è pari a 300 J , dire se il processo è reversibile o irreversibile.

(2)

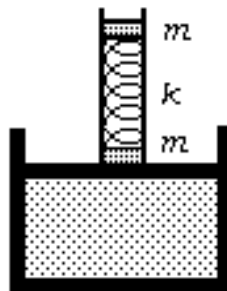
In un processo isotermico deve essere

$$Q = L.$$

Essendo il valore di L inferiore a tale valore, abbiamo a che fare con un processo irreversibile, nel quale il lavoro di espansione compiuto dal gas è minore in quanto una parte del calore ricevuto viene speso per vincere gli attriti.

12.27. Una molla ideale di rigidità $k = 100 \text{ N/m}$ è compressa di un tratto $d = 4 \text{ cm}$ tra due dischi uguali di massa $m = 500 \text{ g}$ e sezione $S = 50 \text{ cm}^2$ mediante dei fili. Il tutto è appoggiato sul pistone mobile di massa trascurabile di un cilindro contenente un gas. Se si bruciano i fili, si osserva che il pistone si abbassa del 2%: se la molla si scarica in $t = 5 \text{ ms}$, qual è il coefficiente di comprimibilità del gas?

(4)



L'energia immagazzinata nella molla compressa, allorché si bruciano i fili, si trasforma in energia cinetica dei due dischi:

$$\frac{1}{2} k d^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = d \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Il disco inferiore acquista quindi una quantità di moto verso il basso

$$q = m v = d \sqrt{\frac{k m}{2}},$$

esercitando sul pistone una pressione

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\Delta q}{S \Delta t} = \frac{d}{S \Delta t} \sqrt{\frac{k m}{2}} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{10^2 \cdot 0,5}{2}} = 8 \text{ kPa}.$$

La legge di comprimibilità afferma che

$$-\frac{dV}{V} = k dp,$$

ovvero, in termini finiti:

$$k = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} = \frac{0,02}{8 \cdot 10^3} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}.$$

12.28. Un gas perfetto subisce un processo politropico reversibile di equazione $p V^{3/2} = \text{cost.}$ Determinare il massimo numero di gradi di libertà delle sue molecole perché il gas, mentre assorbe calore, possa diminuire la temperatura. **(4)**

In una politropica l'espressione del calore specifico molare è

$$c_x = R \left(\frac{1}{1-k} + \frac{f}{2} \right);$$

se, fornendo calore, il gas si raffredda, deve essere $c_x < 0$, ovvero

$$\frac{1}{1 - \frac{3}{2}} + \frac{f}{2} < 0,$$

$$f < 4.$$

12.29. Il pistone mobile di un recipiente di massa $M = 80 \text{ kg}$ e sezione $S = 80 \text{ cm}^2$ al cui interno è contenuto un gas perfetto è in equilibrio comprimendo una molla ideale di rigidità $k = 10^4 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l = 40 \text{ cm}$. Se sul pistone viene appoggiato un oggetto di massa $m = 40 \text{ kg}$, determinare la variazione percentuale di temperatura del gas, assumendo la pressione esterna $p_0 = 1 \text{ atm}$. **(4)**

Si ha:

$$\frac{\Delta T}{T} 100 = \frac{T_f - T_i}{T_i} 100 = \left(\frac{p_f V_f}{p_i V_i} - 1 \right) 100 = \left(\frac{p_o + \frac{m+M}{S} g}{p_o + \frac{M}{S} g} \cdot \frac{l - x_f}{l - x_i} - 1 \right) 100.$$

Ora le compressioni della molla nella posizione iniziale e finale sono rispettivamente

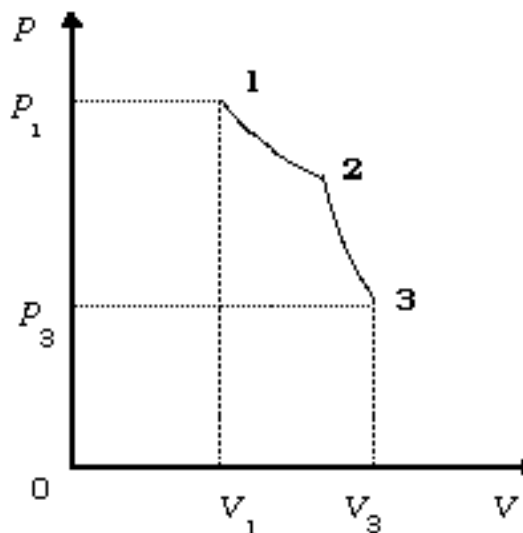
$$x_i = \frac{Mg}{k}, \quad x_f = \frac{(m+M)g}{k},$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T} 100 &= \left(\frac{p_o + \frac{m+M}{S} g}{p_o + \frac{M}{S} g} \cdot \frac{k l - (m+M)g}{k l - Mg} - 1 \right) 100 = \\ &= \left(\frac{2,5}{2} \cdot \frac{4000 - 1176}{4000 - 784} - 1 \right) 100 = 9,7\%. \end{aligned}$$

12.30. Un gas perfetto biatomico subisce un processo reversibile isotermico 1-2 seguito da uno adiabatico 2-3. Sapendo che $V_1 = 1$ l, $V_3 = 2$ l, $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Pa, $p_3 = 1,33 \cdot 10^5$ Pa, calcolare il lavoro compiuto dal gas nell'intero processo 1-2-3.

(4)



Il lavoro compiuto nel processo isotermico 1-2 è

$$L_{1-2} = n R T \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

mentre quello nel processo adiabatico 2-3 è

$$L_{2-3} = -n c_v (T_3 - T_2) = -\frac{n c_v}{n R} (p_3 V_3 - p_2 V_2) = -\frac{5}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2),$$

essendo il gas in esame biatomico. Per ricavare i valori delle coordinate dello stato intermedio 2, applichiamo le leggi di Poisson e di Boyle:

$$p_3 V_3^\gamma = p_2 V_2^\gamma,$$

$$p_2 V_2 = p_1 V_1,$$

da cui, dividendo membro a membro:

$$V_2^{\gamma-1} = \frac{p_3}{p_1} \left(\frac{V_3^\gamma}{V_1} \right).$$

Risulta quindi

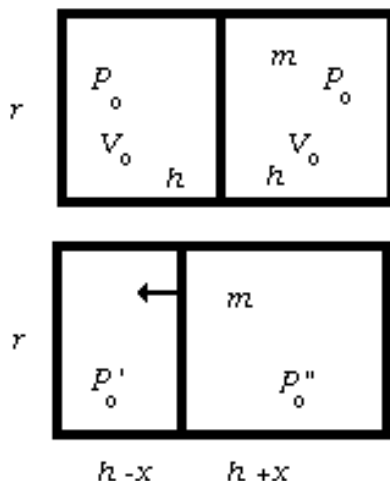
$$V_2 = 1,84 \text{ l},$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{1,84 \cdot 10^{-3}} = 1,63 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Sarà allora:

$$\begin{aligned} L_{1-2-3} &= 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \ln \frac{1,84}{1} - 2,5 (2,66 \cdot 10^2 - 1,84 \cdot 1,63 \cdot 10^2) = \\ &= 182,9 + 84,8 = 267,7 \text{ J}. \end{aligned}$$

12.31. Un cilindro chiuso è diviso in due parti uguali di volume $V_0 = 5 \text{ l}$ da un pistone di raggio $r = 10 \text{ cm}$ e massa $m = 1 \text{ kg}$ scorrevole senza attrito. Le due metà sono riempite con un gas ideale biatomico a pressione $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Trascurando qualsiasi dispersione di calore tra pistone e pareti, calcolare il periodo di oscillazione del pistone quando esso viene spostato leggermente dalla posizione di equilibrio. (5)



Supponiamo che il pistone venga spostato verso sinistra di un tratto $x \ll h$; non appena lasciato libero, il pistone ritornerà nella posizione iniziale sotto l'azione di una forza di richiamo

$$F = (p''_o - p'_o) \pi r^2,$$

dove p''_o e p'_o sono rispettivamente le pressioni nelle due metà del cilindro dopo lo spostamento del pistone.

Essendo adiabatermani tanto il pistone quanto il cilindro, il gas subirà un processo adiabatico che possiamo ritenere reversibile: infatti, essendo $x \ll h$, la differenza tra p''_o e p'_o sarà talmente piccola da assicurare il mantenimento dell'equilibrio meccanico, condizione indispensabile per la reversibilità del processo. Possiamo quindi applicare l'equazione di Poisson $p V^\gamma = \text{costante}$ scrivendo, se γ è il coefficiente adiabatico del gas:

$$p'_o [\pi r^2 (h + x)]^\gamma = p''_o [\pi r^2 (h - x)]^\gamma,$$

da cui

$$p''_o - p'_o = p'_o \left[\left(\frac{1 + \frac{x}{h}}{1 - \frac{x}{h}} \right)^\gamma - 1 \right].$$

Ma, essendo $x \ll h$, possiamo approssimare lo sviluppo binomiale nella forma

$$\left(1 \pm \frac{x}{h} \right)^\gamma = 1 \pm \frac{\gamma x}{h},$$

perciò

$$p''_o - p'_o = \frac{2 \gamma x p'_o}{h};$$

essendo $x \ll h$, possiamo approssimare la precedente formula con

$$p''_o - p'_o = \frac{2 \gamma x p'_o}{h}.$$

Se ora applichiamo al pistone la seconda legge di Newton, tenendo conto che la forza agente sul pistone è opposta alla differenza di pressione, abbiamo:

$$a = \frac{F}{m} = - \frac{(p''_o - p'_o) \pi r^2}{m} = - \frac{2 \gamma p'_o \pi r^2}{h m} x.$$

Essendo poi $V_o = \pi r^2 h$ e potendo approssimare p'_o con la pressione iniziale p_o , si ha

$$a = - \frac{2 \gamma p_o \pi^2 r^4}{m V_o} x,$$

che è l'equazione differenziale di un moto armonico semplice di periodo

$$T = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{2 m V_o}{\gamma p_o}}.$$

Eseguendo i calcoli, si ricava

$$T = 26,7 \text{ ms.}$$

12.32. Un gas perfetto monoatomico viene sottoposto a un processo isobarico reversibile a pressione atmosferica $p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, durante il quale il volume passa da $V_1 = 10 \text{ l}$ a $V_2 = 20 \text{ l}$; calcolare: a) la variazione di energia interna ΔU , b) il lavoro compiuto dal gas, c) la quantità di calore assorbita dal gas. **(3)**

a)

$$\Delta U = n c_V \Delta T = n c_V (T_2 - T_1) = n c_V \frac{p (V_2 - V_1)}{nR} = \frac{3}{2} p (V_2 - V_1) = 1,52 \text{ kJ}.$$

b)

$$L = p (V_2 - V_1) = 1,01 \text{ kJ}.$$

c)

$$Q = L + \Delta U = 2,53 \text{ kJ}.$$

12.33. In seguito a un'espansione isoterma reversibile a 300 K $m = 531 \text{ g}$ di azoto subiscono una diminuzione di pressione da $p_1 = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a $p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Calcolare a) il lavoro compiuto dal gas e b) la quantità di calore scambiata. **(3)**

a) In un processo isotermico reversibile è noto essere

$$L = n R T \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R T \ln \frac{p_1}{p_2};$$

essendo il peso molecolare dell'azoto pari a $M = 28 \text{ g/mol}$, ne consegue che

$$L = \frac{531}{28} \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2 \ln 10 = 109 \text{ kJ}.$$

b) In un processo isotermico $Q = L$, perciò la quantità di calore viene assorbita dal gas nella misura di 109 kJ.

12.34. Se il calore specifico molare di una politropica vale $c = c_V + 0,1 R$, calcolare l'esponente politropico. **(3)**

Il calore specifico molare in una politropica vale

$$c_x = c_V + \frac{R}{1 - k},$$

dove k è l'esponente politropico.

Nel caso in esame:

$$\frac{R}{1 - k} = 0,1 R$$

perciò

$$k = -9.$$

12.35. Se un gas perfetto biatomico espande reversibilmente secondo la legge $p V^2 = \text{costante}$, calcolare: a) il segno della variazione di temperatura, b) del lavoro, c) il calore specifico molare politropico. **(4)**

a) Se $p V^2 = \text{costante}$, sarà

$$\frac{n R T}{V} V^2 = n R T V = \text{costante},$$

quindi

$$T V = \text{costante},$$

il che vuol dire che in un'espansione (aumento di volume) sarà $\Delta T < 0$.

b) Trattandosi di un processo reversibile, abbiamo

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k dV}{V^2} = -k \left[\frac{1}{V} \right]_{V_1}^{V_2} = -k \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = k \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) > 0,$$

essendo $V_1 < V_2$.

c) Il calore specifico molare politropico è dato dalla relazione

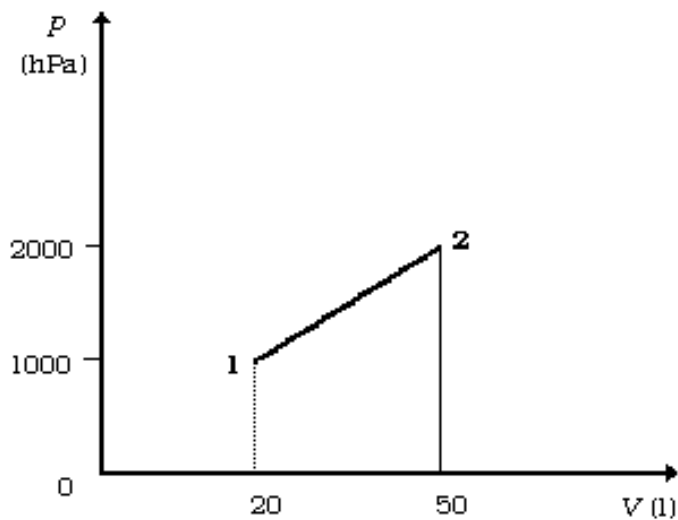
$$c_x = c_V + \frac{R}{1 - k},$$

dove $k = 2$ è l'esponente politropico; trattandosi di un gas biatomico, con $c_V = 5R/2$, si ha:

$$c_x = \frac{5}{2} R + \frac{R}{1 - 2} = \frac{3}{2} R.$$

12.36. Un gas perfetto triatomico espande da $V_1 = 20 \text{ l}$ a $V_2 = 50 \text{ l}$ in un processo il cui profilo nel piano (p, V) è rettilineo. La pressione iniziale è $p_1 = 1000 \text{ hPa}$, mentre quella finale è $p_2 = 2000 \text{ hPa}$. Calcolare la quantità di calore assorbita dal gas nel processo.

(4)



Con riferimento alla figura, calcoliamo il lavoro compiuto dal gas come l'area del trapezio avente per lato obliquo il profilo della trasformazione.

Dal primo principio ricaviamo allora che

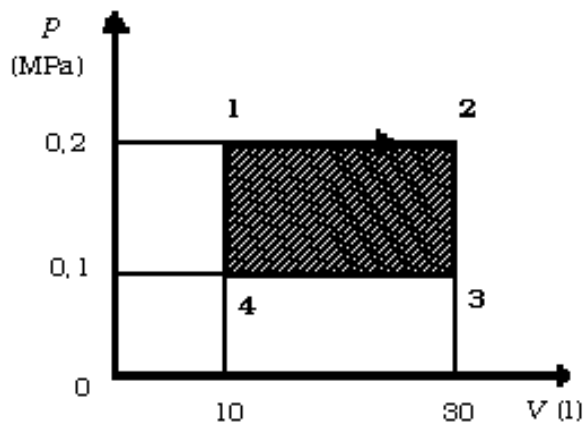
$$L = \frac{1}{2} \cdot 3000 \text{ hPa} \cdot 30 \text{ l} = 4,5 \text{ kJ};$$

allora

$$Q = L + \Delta U = L + n c_v (T_2 - T_1) = L + 3 (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ = (4,5 + 24) \text{ kJ} = 28,5 \text{ kJ}.$$

12.37. Un corpo passa dallo stato 1 allo stato 3 una prima volta lungo il percorso 1-2-3 e una seconda volta lungo il percorso 1-4-3. Qual è la differenza tra le due quantità di calore $Q_{123} - Q_{143}$?

(3)



$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = L_{12} + \Delta U_{12} + L_{23} + \Delta U_{23} = L_{12} + L_{23} + \Delta U_{13},$$

$$Q_{143} = Q_{14} + Q_{43} = L_{14} + L_{43} + \Delta U_{13},$$

quindi

$$\begin{aligned} Q_{123} - Q_{143} &= L_{12} + L_{23} - L_{14} - L_{43} = L_{12} - L_{43} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 10^5 - 10^5) = \\ &= 2 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

12.38. Stabilire per quali valori dell'esponente politropico k il calore specifico molare di un gas perfetto biatomico coincide con quello di un gas perfetto monoatomico con esponente uguale e opposto.

(2)

Il calore specifico molare di una politropica è

$$c_x = c_V + \frac{R}{1 - k}.$$

Per un gas biatomico sarà

$$c_2 = \frac{5}{2} R + \frac{R}{1 - k},$$

mentre per un gas monoatomico con esponente uguale e opposto:

$$c_1 = \frac{3}{2} R + \frac{R}{1 + k}.$$

Imponendo $c_1 = c_2$, si ha

$$\frac{3}{2} R + \frac{R}{1 + k} = \frac{5}{2} R + \frac{R}{1 - k}$$

da cui

$$-k^2 + 2k + 1 = 0,$$

che ha per soluzioni

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

12.39. 0,1 mol di gas perfetto monoatomico espandono isotermicamente e reversibilmente a pressione atmosferica $p = 1 \text{ atm}$ e temperatura $T = 300 \text{ K}$ triplicando il volume. Nel caso in cui il processo viene condotto irreversibilmente il volume finale del gas è 2,06 volte quello iniziale. Calcolare il lavoro compiuto per vincere gli attriti interni.

(4)

In un processo reversibile, il lavoro compiuto dal gas nell'espansione sarebbe

$$L_{\text{rev}} = n R T \ln 3 = 0,1 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot 1,099 = 274 \text{ J.}$$

Essendo invece irreversibile, risulta

$$L_{\text{irr}} = p (V_f - V_i) = p (2,06 V_i - V_i) = 1,06 n R T = 264,3 \text{ J.}$$

Il lavoro compiuto contro gli attriti sarà

$$L_a = L_{\text{rev}} - L_{\text{irr}} = 9,7 \text{ J.}$$

12.40. $n = 1$ mol di gas perfetto biatomico contenuto in un recipiente a volume costante viene riscaldata irreversibilmente di $\Delta T = 100$ K. Se il calore necessario è $Q = 2500$ J, quale percentuale di esso viene persa per vincere gli attriti interni?

(3)

Se il processo fosse reversibile, avremmo

$$Q_{\text{rev}} = n c_V \Delta T = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 100 = 2077,5 \text{ J.}$$

Dal momento che vengono persi 422,5 J, la percentuale richiesta sarà

$$p = \frac{422,5}{2500} 100 = 16,9 \text{ \%}.$$

12.41. Un gas perfetto contenente $N = 1,7 \cdot 10^{27}$ molecole viene riscaldato in un recipiente sigillato con un fornello di potenza $W = 800$ W acceso per $t = 5$ min. Se la temperatura del gas aumenta di $\Delta T = 4$ K, calcolare: a) il numero di gradi di libertà delle molecole del gas, b) la sua variazione di energia cinetica traslazionale.

(3)

a) Ricordando che $N = n N_0$, con N_0 numero di Avogadro, e tenendo conto che il processo è isovolumico, abbiamo:

$$Q = W t = n c_V \Delta T = \frac{N}{N_0} \frac{f}{2} R \Delta T$$

da cui

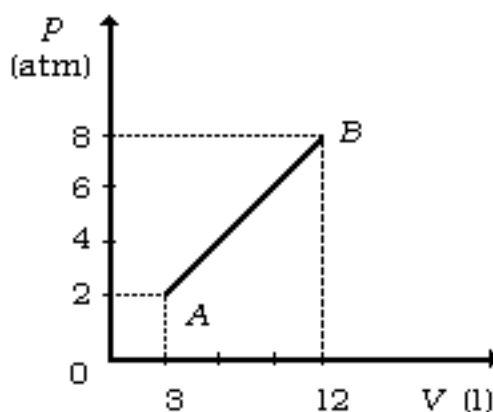
$$f = \frac{2 N_0 W t}{N R \Delta T} = \frac{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 800 \cdot 300}{1,73 \cdot 10^{27} \cdot 8,314 \cdot 4} = 5 \quad .$$

b) Si ha

$$\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3 N}{2 N_0} R \Delta T = \frac{3 \cdot 1,73 \cdot 10^{27} \cdot 8,314 \cdot 4}{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 143,3 \text{ kJ} \quad .$$

12.42. Un gas perfetto biatomico subisce il processo reversibile AB indicato in figura. Ricavare l'equazione della trasformazione e calcolare il relativo calore specifico molare.

(4)



L'equazione della trasformazione si ricava agevolmente osservando che il profilo è una retta per l'origine di coefficiente angolare $2/3$; allora

$$p = \frac{2}{3} V,$$

cioè si tratta di una politropica con esponente $k = -1$.

Ricordando che il calore specifico molare di una politropica è espresso da

$$c_x = c_V + \frac{R}{1 - k} ,$$

si ottiene:

$$c_x = \frac{5R}{2} + \frac{R}{2} = 3R \quad .$$

12.43. Per riscaldare a volume costante e irreversibilmente $n = 1$ mol di gas perfetto di $\Delta T = 60$ K è necessaria la quantità di calore $Q = 1700$ J, dei quali vengono dissipati per attriti interni $Q_d = 204,2$ J.

a) Stabilire il numero di gradi di libertà delle molecole del gas;

- b) calcolare il lavoro compiuto sul gas;
 c) calcolare quale sarebbe l'aumento di temperatura se la stessa quantità di calore $Q = 1700 \text{ J}$ venisse fornita al gas in un processo isobarico reversibilmente.

(4)

- a) Il calore fornito al gas viene utilizzato in parte per vincere gli attriti, in parte per aumentarne l'energia interna:

$$Q = Q_d + n c_V \Delta T,$$

da cui

$$c_V = \frac{Q - Q_d}{n \Delta T} = \frac{1700 - 204,2}{60} = 24,93 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 3 R.$$

Il gas è quindi poliatomico con $f = 6$.

- b) In un processo isocorico è $L = 0$.

- c) Essendo in un processo isobarico

$$Q_{\text{isob}} = n c_p \Delta T,$$

sarà

$$\Delta T' = \frac{Q_{\text{isob}}}{n c_p} = \frac{Q_{\text{isob}}}{4 R} = \frac{1700}{4 \cdot 8,31} = 51,1 \text{ K}.$$

12.44. Per riscaldare isobaricamente e irreversibilmente $n = 1 \text{ mol}$ di gas perfetto di $\Delta T = 60 \text{ K}$ è necessaria la quantità di calore $Q = 1700 \text{ J}$, dei quali vengono dissipati per attriti interni $Q_d = 204,2 \text{ J}$. a) Stabilire il numero di gradi di libertà delle molecole del gas; b) calcolare quale sarebbe l'aumento di temperatura se la stessa quantità di calore $Q = 1700 \text{ J}$ venisse fornita al gas reversibilmente.

(4)

- a) Al gas vanno effettivamente $Q' = Q - Q_d = 1497,8 \text{ J}$; trattandosi di un processo isobarico, sarà

$$Q' = n c_p \Delta T,$$

da cui

$$c_p = \frac{f + 2}{2} R = \frac{Q'}{n \Delta T} = \frac{1497,8}{60} = 24,96 \frac{\text{J}}{\text{mol K}},$$

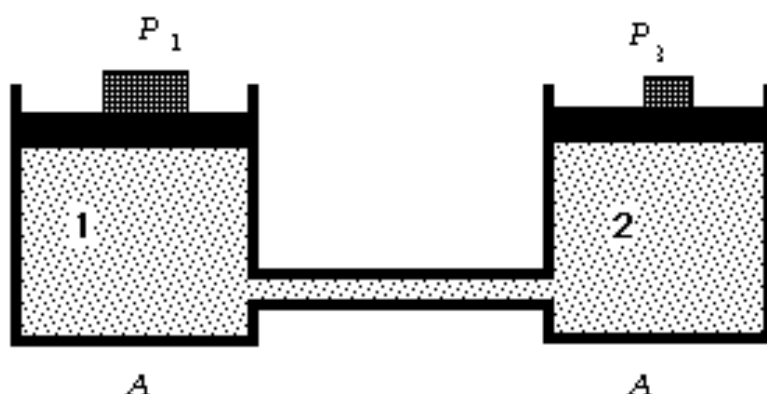
$$f = \frac{49,93}{8,31} - 2 = 4.$$

b) In caso di processo reversibile abbiamo

$$\Delta T_{\text{rev}} = \frac{Q}{n c_p} = \frac{Q}{n \frac{f+2}{2} R} = \frac{2 Q}{6R} = \frac{Q}{3R} = \frac{1700}{3 \cdot 8,31} = 68,2 \text{ K}.$$

12.45. Un gas di densità $\rho = 1$ unità SI è contenuto in un recipiente a U con i due pistoni mobili entrambi di sezione $A = 400 \text{ cm}^2$. Se si carica il pistone di sinistra con un peso $P_1 = 100 \text{ N}$ e quello di destra con un peso $P_2 = 50 \text{ N}$, ipotizzando un processo isotermico, calcolare la velocità di efflusso dal recipiente 1 al 2 attraverso il tubo di collegamento.

(4)



Il lavoro compiuto sul gas compresso dal peso $P_1 - P_2$ si trasforma in energia cinetica delle molecole; ma

$$L = -n R T \ln \frac{V_f}{V_i} = n R T \ln \frac{p_f}{p_i} = p_i V_i \ln \frac{p_o + \frac{P_1 - P_2}{A}}{p_o}.$$

Indicando con M la massa totale di gas contenuta nel recipiente 1, avremo allora

$$p_i V_i \ln \frac{p_o + \frac{P_1 - P_2}{A}}{p_o} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \rho V_i v^2,$$

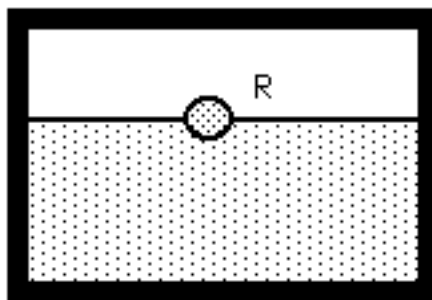
da cui

$$v = \sqrt{\frac{2 p_o}{\rho} \ln \left(1 + \frac{P_1 - P_2}{A p_o} \right)} = \sqrt{2,02 \cdot 10^5 \ln \left(1 + \frac{50}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,01 \cdot 10^5} \right)} = 49,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

12.46. Un cilindro a pareti adiatermane è diviso da un setto metallico sottile in due parti: in quella superiore è praticato il vuoto, mentre in quella inferiore è contenuto un gas perfetto di coefficiente adiabatico $\gamma = 1,5$ a temperatura $T_1 = 300$ K. Aprendo il rubinetto R, il gas si espande lentamente fino a occupare l'intero volume.

Calcolare: a) la quantità di calore scambiata dal gas, b) la temperatura finale, c) la variazione di energia interna, d) il lavoro compiuto dal gas, e) il numero di gradi di libertà delle molecole del gas.

(3)



a) $Q = 0$, essendo il processo adiabatico, anche se irreversibile.

b), c), d) Dal primo principio, essendo $L = 0$ (espansione nel vuoto), sarà anche $\Delta U = 0$, cioè la temperatura finale coincide con quella iniziale, 300 K e l'energia interna si mantiene costante.

e) Dalla relazione

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$$

si ha

$$f = \frac{2}{\gamma - 1} = 4.$$

Il fatto che risulti $f = 4$ indica che si tratta di una miscela di gas perfetti, uno dei quali necessariamente monoatomico.

12.47. 0,2 mol di gas perfetto biatomico espandono irreversibilmente in un processo adiabatico dalla pressione $p_1 = 3$ atm e volume $V_1 = 2$ l fino al volume finale $V_f = 5$ l. La pressione esterna è $p_0 = 1$ atm.. La temperatura del gas diminuisce di $\Delta T = -81$ K. Calcolare: a) il lavoro compiuto contro gli attriti, b) la diminuzione di temperatura nel caso in cui il processo venga condotto reversibilmente, c) il volume finale nel processo reversibile.

(4)

a) Il primo principio della termodinamica per un gas perfetto in un processo adiabatico irreversibile si scrive nella forma

$$L_I + L_a + \Delta U_I = 0,$$

$$p_0 (V_f - V_i) + L_a + n c_V \Delta T = 0,$$

$$L_a = -1,01 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 0,2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 81 = 33,6 \text{ J}.$$

b) Nel caso di processo reversibile, il lavoro di espansione si può calcolare indifferentemente attraverso l'equazione di Poisson o dal primo principio, per cui

$$L_R = \int_{V_i}^{V_f} p dV = -\frac{p_i V_i^\gamma}{1-\gamma} (V_{fR}^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}) = -n c_V \Delta T_R.$$

Ora, ricordando che in un processo adiabatico il lavoro è una funzione di stato, deve essere $L_I = L_R$: ne consegue che $L_R = p_0 (V_f - V_i) = 303 \text{ J}$, e pertanto

$$\Delta T_R = \frac{-L_R}{n c_V} = -\frac{303}{0,2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31} = -72,9 \text{ K}.$$

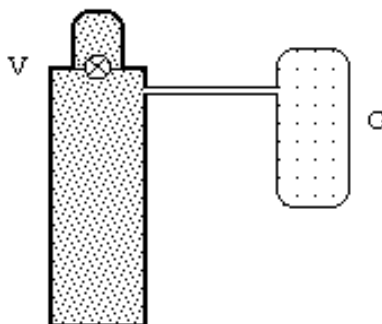
La temperatura finale nel processo reversibile vale quindi

$$T_{fR} = T_i + \Delta T_R = \frac{p_i V_i}{n R} + \Delta T_R = \frac{3 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 8,31} - 72,9 = 291,7 \text{ K};$$

appliciamo ora l'equazione di Poisson che correla temperatura e volume in un'adiabatica reversibile per ricavare

$$V_{fR} = V_i \left(\frac{T_i}{T_{fR}} \right)^{1/(\gamma-1)} = 2 \left(\frac{364,6}{291,7} \right)^{2,5} = 3,49 \text{ l}.$$

12.48. Una bombola inizialmente chiusa da una valvola V contiene $n = 2 \text{ mol}$ di elio alla temperatura $T_1 = 293 \text{ K}$ e a pressione $p_1 = 15 \text{ atm}$. Essa è collegata mediante un capillare a un recipiente a volume variabile e pressione costante $p_0 = 1 \text{ atm}$. detto **gasometro**. Aprendo la valvola, il gas passa nel gasometro molto lentamente mantenendo la temperatura costantemente uguale a T_1 .



Calcolare: a) il lavoro compiuto e la quantità di calore ceduta dal gas durante la trasformazione, b) il lavoro che si otterrebbe se il processo fosse reversibile.

(3)

a) Trattandosi di un processo irreversibile, sarà

$$L = p_{\text{est}} \Delta V = p_{\text{est}} (V_f - V_i),$$

inoltre, essendo la temperatura costante:

$$p V_i = p' V_f;$$

inoltre

$$p' V_f = n R T.$$

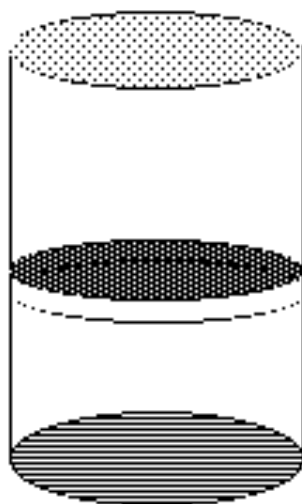
Essendo in un processo isotermico di un gas perfetto $\Delta U = 0$, sarà $Q = L = 4,55$ kJ. Si tratta però di una quantità di calore assorbita dal gas, in quanto positiva.

b) Se il processo fosse reversibile avremmo

$$L_{\text{rev}} = n R T \ln \frac{V_f}{V_i} = 2 \cdot 8,31 \cdot 293,15 \cdot \ln 15 = 13,2 \text{ kJ}.$$

12.49. Un cilindro di raggio $r = 19$ cm aperto superiormente contiene nella parte inferiore $n = 1$ mol di gas perfetto monoatomico di volume $V_0 = 57,2$ l e temperatura $T_0 = 273$ K; il pistone viene abbassato molto lentamente fino a trovarsi in equilibrio quando il volume del gas si è dimezzato. Durante la compressione la variazione di temperatura del gas è la metà di quella che si avrebbe se il processo fosse adiabatico. Calcolare: a) la variazione di energia interna del gas, b) la massa del pistone, c) l'equazione del processo di compressione nel piano (p, V) ipotizzando che il suo grafico sia rettilineo.

(4)



a) Per un processo adiabatico vale l'equazione di Poisson $T V^{\gamma-1} = \text{cost.}$,

$$T_f V_f^{2/3} = T_o V_o^{2/3},$$

$$T_f = T_o \left(\frac{V_o}{V_f} \right)^{2/3} = 273 \cdot 2^{2/3} = 433,2 \text{ K.}$$

Risulta allora che nel processo adiabatico $T_f - T_o = 160,2 \text{ K}$, quindi nel processo in esame l'aumento di temperatura sarà $\Delta T = 80,1 \text{ K}$. La variazione di energia interna del gas sarà dunque

$$\Delta U = n c_V \Delta T = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,31 \cdot 80,1 = 998,5 \text{ J.}$$

b) L'equilibrio si raggiunge quando la pressione del gas uguaglia quella esercitata dall'atmosfera e dal peso del pistone, ovvero

$$p_f = p_o + \frac{m g}{\pi r^2},$$

perciò, applicando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\left(p_o + \frac{m g}{\pi r^2} \right) V_1 = n R T_f,$$

$$m = \left(\frac{n R T_f}{V_1} - p_o \right) \frac{\pi r^2}{g} = \left(\frac{1 \cdot 8,31 \cdot 353,1}{28,6 \cdot 10^{-3}} - 1,01 \cdot 10^5 \right) \frac{3,14 \cdot (1,9)^2 \cdot 10^{-2}}{9,8} = 18,5 \text{ kg.}$$

c) La pressione iniziale è

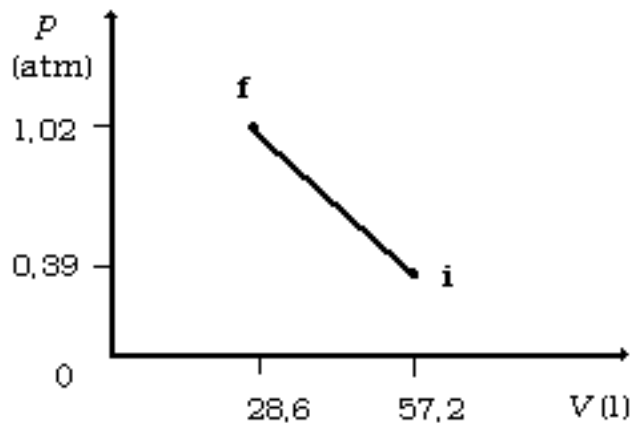
$$p_i = \frac{n R T_o}{V_o} = \frac{1 \cdot 8,31 \cdot 273}{5,72 \cdot 10^{-2}} = 3,97 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,39 \text{ atm},$$

mentre quella finale è

$$p_f = \frac{n R T_f}{V_f} = \frac{1 \cdot 8,31 \cdot 353,1}{2,86 \cdot 10^{-2}} = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,02 \text{ atm.}$$

Con riferimento alla figura, scriviamo l'equazione della retta che passa per i due punti i ed f che rappresentano gli stati estremi

$$\begin{cases} 1,02 = 28,6 m + n \\ 0,39 = 57,2 m + n \end{cases}$$



sistema che fornisce $m = -0,02$, $n = 1,65$.
Il processo è allora descritto dall'equazione

$$p = -0,02 V + 1,65$$

in unità litri e atmosfere.

12.50. La capacità termica di un corpo dipende dalla temperatura secondo la relazione, espressa con unità SI:

$$C = 10,00 + 2 \cdot 10^{-2} T + 3 \cdot 10^{-5} T^2.$$

Qual è la quantità di calore assorbita dal corpo nel passaggio da $T_1 = 300$ K a $T_2 = 400$ K? **(2)**

$$\begin{aligned} Q &= \int_{T_1}^{T_2} C dT = \int_{T_1}^{T_2} (10 + 2 \cdot 10^{-2} T + 3 \cdot 10^{-5} T^2) dT = \\ &= 10(T_2 - T_1) + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} (T_2^2 - T_1^2) + \\ &\quad + \frac{3 \cdot 10^{-5}}{3} (T_2^3 - T_1^3) = \\ &= 1000 + 10^{-2} (7 \cdot 10^4) + 10^{-5} (37 \cdot 10^6) = 2,07 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

12.51. Una stufa ha il coperchio in ghisa (conducibilità termica $k = 80$ unità SI) di spessore $s = 1$ cm e superficie $S = 300$ cm². La differenza di temperatura tra le due facce del coperchio è costantemente $\Delta t = 5$ °C. Se la stufa è installata in un locale di volume $V = 80$ m³ e le dispersioni di calore attraverso i serramenti del locale assommano al 15%, calcolare in quanto tempo la temperatura del locale aumenta di $\Delta t_1 = 10$ °C, sapendo che la densità dell'aria è $\rho = 1,3$ unità SI e considerando l'aria un gas perfetto. **(4)**

Applichiamo la legge di Fourier per calcolare il flusso termico erogato dalla stufa, supponendo che esso avvenga prevalentemente attraverso il coperchio:

$$\frac{dQ}{dt} = k S \frac{\Delta t}{s}.$$

Tenendo conto della dispersione del 15%, all'aria del locale arriverà nel tempo t una quantità di calore

$$Q = 0,85 \, t \, k S \frac{\Delta t}{s}.$$

Applicando il primo principio della termodinamica, la stessa quantità di calore, essendo il volume di aria riscaldata costante, si potrà scrivere come

$$Q = n c_v \Delta t_1 = 3 n R \Delta t_1 = 3 \frac{m}{M} R \Delta t_1 = 3 \frac{\rho V}{M} R \Delta t_1,$$

pertanto, uguagliando le due espressioni di Q , si ottiene

$$t = \frac{3 \rho V R \Delta t_1 s}{0,9 M S k \Delta t} = \frac{3 \cdot 1,3 \cdot 80 \cdot 8,31 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{0,85 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 80 \cdot 5} = 877 \, \text{s} = 14,6 \, \text{min}.$$

12.52. In un recipiente a pareti rigide adiatermane sono contenute $n_1 = 2$ mol di ossigeno perfetto a temperatura $T_1 = 300$ K. Se introduciamo altre N molecole di ossigeno con velocità quadratica media $v_{\text{qm}} = 300$ m/s, si raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura $T_o = 290$ K. Calcolare N , sapendo che il peso molecolare dell'ossigeno è $M = 32$ g/mol.

(3)

Essendo le pareti rigide e adiatermane, non avvengono scambi di calore e non viene compiuto lavoro di deformazione delle pareti; per il primo principio non si ha quindi variazione di energia interna, condizione dalla quale si ricava la temperatura di equilibrio che sarà data, indicando con n_2 il numero di moli aggiunto, da:

$$T_o = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2},$$

da cui

$$n_2 = \frac{n_1 (T_o - T_1)}{T_2 - T_o},$$

pertanto il numero N vale

$$N = n_2 N_o = \frac{n_1 N_o (T_o - T_1)}{T_2 - T_o}.$$

Per ricavare T_2 , ricorriamo alla definizione di velocità quadratica media, dalla quale risulta

$$T_2 = \frac{M v_{\text{qm}}^2}{3 R}$$

e quindi

$$N = \frac{n_1 N_o (T_o - T_1)}{\frac{M v_{\text{qm}}^2}{3 R} - T_o} = \frac{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (-10)}{\frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^4}{3 \cdot 8,31} - 290} = 6,9 \cdot 10^{22} \text{ molecole}$$